ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 8. № 1 (2016). С. 84-101.

УДК 519.626

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО ФРЕШЕ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Р. МАНАПОВА*, Ф.В. ЛУБЫШЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления коэффициентами полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными данными и решениями (состояниями), с управлениями в граничных условиях сопряжения разнородных сред и правых частях уравнений состояния. Доказаны дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного аналога функционала качества экстремальных задач.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, функционал качества, дифференцируемость, Липшиц-непрерывность.

Mathematics Subject Classification: 49J20, 35J61, 65N06

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), и граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта. Задачи для уравнений математической физики (УМФ) с условиями неидеального контакта часто возникают при моделировании различных процессов в механике сплошных сред, теории упругости, теплопередачи, диффузии. Разрыв коэффициентов и решения имеет место в случае, когда область является неоднородной и состоит из нескольких частей с разными свойствами, либо область содержит тонкие прослойки S с физическими характеристиками, резко отличающимися от основной среды (см. [1]-[3]). Считая такие прослойки S очень тонкими и слабо проницаемыми, их влияние на исследуемый физический процесс, то есть условия контакта можно описать соотношениями (см., например, [1], стр. 167):

$$p(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^- = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^+ = \theta(x)[u],\ x \in S,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^{\pm} = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\cos(n, x_\alpha)\right)^{\pm},$$

где $[u] = u^+(x) - u^-(x)$ — скачок функции $u(x)$ на S; $p(x)$ — заранее неизвестный поток вещества (теплоты) через элементарную площадку; $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$ — заданная функция, $S = \overline{\Omega}^- \cap \overline{\Omega}^+$ — внутренняя граница раздела сред, $\Omega^- \cap \Omega^+ = \emptyset$, Ω^- и Ω^+ — некоторые области, так что $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup S$ — ограниченная область.

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev, On Frechèt differentiability of cost functional in optimal control of coefficients of elliptic equations.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4147.2015.1).

Поступила 16 мая 2015 г.

Математические оптимизации процессов в подавляющем большинстве не поддаются аналитическому исследованию и требуют применения численных методов и их реализации на ЭВМ. Численное решение задач оптимального управления (ЧРЗОУ) с использованием ЭВМ в широком смысле связано с решением следующих вопросов:

1. Постановка задач оптимизации, обеспечивающая существование решения на множестве допустимых управлений, являющемся подмножеством некоторого бесконечномерного векторного пространства;
2. Сведение задач оптимального управления к последовательности конечномерных задач, обеспечивающее сходимость в некотором смысле решений конечномерных задач к решениям исходных задач оптимального управления;
3. Численное решение конечномерных задач.

Задачи для УМФ с разрывными коэффициентами и решением не так широко исследованы (см. обзор работ в [4]). Значимые результаты для задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями получены в работах [4]-[6], где разработаны новые методы исследования задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями, основанные на построении и исследовании разностных аппроксимаций экстремальных задач, установлении оценок точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, и регуляризации аппроксимаций.

Данная работа является естественным продолжением [4]-[6]. В ней исследуются нелинейные задачи оптимального управления, описываемые полулинейными эллиптическими уравнениями с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями) с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта. В качестве управления выступают коэффициенты в граничном условии сопряжения разнородных сред и правой части уравнения состояния. Работа направлена на решение следующего третьего этапа ЧРЗОУ, а именно, на разработку эффективных численных методов решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления. Заметим, что данные вопросы ранее не рассматривались. Для численной реализации конечномерных задач оптимального управления доказываются дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного функционала аппроксимирующих сеточных задач. Получены эффективные процедуры расчета градиентов минимизируемых сеточных функционалов, использующих решения прямых задач и соответствующих вспомогательных сопряженных задач.

В теплофизических терминах поставленные задачи можно трактовать как задачи оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения разнородных теплопроводящих сред $\theta(x)$ и коэффициентами $f_1(x)$ и $f_2(x)$, характеризующими наличие в средах Ω_1 и Ω_2, соответственно, внутренних источников энергии, за счет которых внутри сред может возникать или поглощаться тепло. При этом коэффициент граничного условия сопряжения характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред [1], [3].

2. Постановка задач

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена «внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$, на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1,\quad 0 < r_2 < l_2\}$ с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overline{S}$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$

области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и решениями: Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$, где компоненты u_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1, 2$, уравнениям

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{1a}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2; \tag{1b}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на границе разрыва S коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S, \tag{1c}$$

где $u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$ $\quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Здесь $\left[u\right] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$; $g(x) = (f_1(x), f_2(x), \theta(x))$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1, 2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \big(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\big)/\big(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\big) \leqslant L_q < \infty$, для всех ξ_α, $\overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $L_q = \mathrm{Const}$.

Введем множество допустимых управлений

$$\begin{gathered} U = \prod_{\alpha=1}^{3} U_\alpha \subset H = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) \times L_2(S), \\ U_\alpha = \big\{g_\alpha(x) = f_\alpha(x) \in L_2(\Omega_\alpha) :\ \varrho_\alpha \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \overline{\varrho}_\alpha \text{ п.в. на } \Omega_\alpha\big\}, \\ \alpha = 1, 2; \quad U_3 = \big\{g_3(x) = \theta(x) \in L_2(S) :\ 0 < \varrho_3 \leqslant \theta(x) \leqslant \overline{\varrho}_3 \text{ п.в. на } S\big\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где ϱ_α, $\overline{\varrho}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 3}$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J :\ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)\right|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r;g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \big(f_1, f_2, \theta\big) \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

В дальнейшем нам понадобятся некоторые пространства, которые введены в работе [6]. Приведем их для полноты изложения. В частности, рассмотрим пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u = (u_1, u_2)$: $V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\big\}$, где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [7]-[9]:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2.$$

Снабженное скалярным произведением и нормой $(u, \vartheta)_V = \sum\limits_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}$, $\|u\|_V^2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}$, $V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS,$$

где $\big[u\big] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $u(x)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Отметим, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [7]-[9] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$, то есть с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2), которые в общем случае различны.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u = (u_1, u_2)$: $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\big\}$ с нормой (см. [4]):

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS.$$

Под решением прямой задачи (1) при фиксированном управлении $g = \big(f_1, f_2, \theta\big) \in U$ понимается функция $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая тождеству

$$Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right] d\Omega_0 + \\ + \int\limits_S \theta(x)[u][\vartheta]dS = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta), \quad \text{для всех } \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}). \tag{4}$$

Замечание 1. В дальнейшем относительно гладкости решения прямой задачи сделаем следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в [5], с. 1384 при исследовании разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи (1) принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству $\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \big\{u = (u_1,u_2) \in W_2^2(\Omega_1)\times W_2^2(\Omega_2)\big\}$, и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \quad \forall g \in U, \quad \text{где } M = \mathrm{Const} > 0.$$

Замечание 2. Здесь и далее, через M, $\widetilde{M}$, M_0, C, C_0, $\widetilde{C}_0$, C_k, $k = \overline{1,3}$ обозначены различные положительные постоянные, независящие от решения $u(r;g)$ и управления $g \in U$ (сеточного решения $y(x;\Phi_h)$, сеточного управления $\Phi_h \in U_h$).

3. Разностная аппроксимация задач оптимизации

Для численного решения задач оптимального управления рассмотрим вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (1)-(3) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [1]). Для аппроксимации задачи (1)-(3) нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha = 1,2$, и в $\overline{\Omega}$. Отметим, что всегда можно построить сетку на $[0,l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1 = \xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Положим $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1,N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1,N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$. Введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1h_1 \in [0,\xi] :\ i_1 = \overline{0,N_{1\xi}},\ N_{1\xi}h_1 = \xi\big\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1h_1 \in [\xi,l_1] :\ i_1 = \overline{N_{1\xi},N_1},\ N_{1\xi}h_1 = l_1\big\}$, $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2h_2 \in [0,l_2] :\ i_2 = \overline{0,N_2}, N_2h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$; $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\overline{\omega} \equiv \overline{\omega}^{(1,2)} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \big(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}\big) \times \overline{\omega}_2 = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1h_1,\ i_1 = \overline{0,N_1},\ N_{1\xi}h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi})h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\big\} \times \overline{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0,\xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0,\xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi,l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$; $\gamma_S = \big\{x_1 = \xi,\ x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2-1)h_2\big\} = \big\{x_1 = \xi,\ x_2^{(i_2)} = i_2h_2,\ i_2 = \overline{1,N_2-1}\big\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1,2$.

Приведем некоторые скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках, которые будут использоваться в дальнейшем (более подробное их описание см. в работе [4]). Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1 \equiv \overline{\Omega}^-$ обозначим через $H_h^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2 \equiv \overline{\Omega}^+$, обозначим через $H_h^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H_h^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\overline{\omega}^{(k)}} y_k(x)\, \nu_k(x)\, \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$

обозначим через $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x_1)$ – средний шаг сеток $\overline{\omega}_1^{(1)}$ и $\overline{\omega}_1^{(2)}$, а $\hbar_2 = \hbar_2(x_2)$ – средний шаг сетки $\overline{\omega}_2$, [1]. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначены пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$ соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y_{k\overline{x}_1} \nu_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\overline{x}_2} \nu_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$
$$\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2,$$

где $\|\nabla y_k\|^2 = \sum\limits_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum\limits_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y^2_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2, \quad k = 1, 2$. Введено в рассмотрение пространство $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2)$, определяемое соотношением $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{ y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}) \right\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y, \nu)_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})},$$

$V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством. Пусть теперь $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)} \subset \overline{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначено нормированное подпространство пространства сеточных функций $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} y_k^2(x) h_1 h_2 =$$
$$= \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x_2 \in \omega_2} y_k^2(\xi, x_2) h_1 h_2, \quad k = 1, 2,$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2.$$

Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначено подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$. Введены пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2)$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{ y = (y_1, y_2) \in L_2(\overline{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times L_2(\overline{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)}) \right\},$$
$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{ y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)}) \right\},$$

с нормами $\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \sum\limits_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})}$, $\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}$, где $\|y_k\|^2_{L_2(\gamma_S)} = \big(y_k, y_k\big)_{L_2(\gamma_S)}$, $\big(y_k, \nu_k\big)_{L_2(\gamma_S)} = \sum\limits_{x \in \gamma_S} h_2 y_k(x)\, \nu_k(x)$, $k = 1, 2$.

Через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\equiv L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)$ обозначено пространство сеточных функций $v_{1h}(x)$, $x\in\omega^{(1)}\cup\gamma_S$, заданных на сетке $\omega^{(1)}\cup\gamma_S$, со скалярным произведением и нормой:

$$(v_{1h},\tilde v_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}v_{1h}(x)\tilde v_{1h}(x)h_1h_2+\frac12\sum_{x\in\gamma_S}v_{1h}(x)\tilde v_{1h}(x)h_1h_2,$$
$$\|v_{1h}(x)\|^2_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)}=(v_{1h},v_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)}\,.$$

Аналогично вводится пространство сеточных функций $H_h^{(2)}(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\equiv L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)$ (см. [4]).

Задачам оптимального управления (1)-(3) поставим в соответствии следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h)=\sum_{x\in\overline\omega^{(1)}}\left|y(x,\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2\hbar_1\hbar_2=\|y(\Phi_h)-u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\overline\omega^{(1)})},\tag{5}$$

при условиях, что сеточная функция $y(\Phi_h)=(y_1(\Phi_h),y_2(\Phi_h))\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline\omega^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемы) для задачи (1), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(\Phi_h)=(v_1(\Phi_h),v_2(\Phi_h))\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline\omega^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}Q_h(y,v)=\left\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(1)}y_{1\overline x_1}v_{1\overline x_1}h_1h_2+\left(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}y_{1\overline x_2}v_{1\overline x_2}h_1h_2+\right.\right.\\
\left.\left.+\frac12\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\overline x_2}(\xi,x_2)v_{1\overline x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\right)\right\}+\\
+\left\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(2)}y_{2\overline x_1}v_{2\overline x_1}h_1h_2+\left(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}y_{2\overline x_2}v_{2\overline x_2}h_1h_2+\right.\right.\\
\left.\left.+\frac12\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\overline x_2}(\xi,x_2)v_{2\overline x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\right)\right\}+\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2)\big]\big[v(\xi,x_2)\big]h_2+\\
+\left\{\left(\sum_{\omega^{(1)}}d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\right)+\right.\\
\left.+\left(\sum_{\omega^{(2)}}d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\right)\right\}=\\
=\left\{\left(\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\Phi_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\right)+\right.\\
\left.+\left(\sum_{\omega^{(2)}}\Phi_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\Phi_{2h}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\right)\right\}=l_h(v),\end{gathered}\tag{6}$$

а сеточные управления $\Phi_h=\big(\Phi_{1h},\Phi_{2h},\Phi_{3h}\big)$ таковы, что

$$\begin{gathered}\Phi_h(x)\in U_h=\prod_{k=1}^3U_{kh}\subset H_h=L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega_2),\\
U_{\alpha h}=\big\{\Phi_{\alpha h}\in L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S):\,0<\varrho_\alpha\leqslant\Phi_{\alpha h}(x)\leqslant\overline\varrho_\alpha,\ \text{п.в. на }\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S\big\},\\
\alpha=1,2;\quad U_3=\big\{\Phi_{3h}(x_2)\in L_2(\omega_2):\,0<\varrho_3\leqslant\Phi_{3h}(x)\leqslant\overline\varrho_3,\ \text{п.в. на }\omega_2\big\},\end{gathered}\tag{7}$$

где ϱ_k, $\overline{\varrho}_k$, $k=\overline{1,3}$ – заданные числа.

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(r)$, $k_\alpha^{(2)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову (см. [6]).

Замечание 2. Доказательство корректности постановок задач оптимального управления (1)-(3), корректности их разностных аппроксимаций сеточными задачами оптимального управления (5)-(7), сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, соответствующих аппроксимационных оценок и регуляризации аппроксимаций проводится по методике из [4]–[6].

Выпишем явный вид разностной схемы (6) в узлах сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$: Требуется найти функцию $y=(y_1,y_2)$, определенную на $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$, $y(x)=y_1(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(1)}$, $y(x)=y_2(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Сеточная функция y_1 удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$-\left(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1}-\left(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2}+d_{1h}(x)q_1(y_1)=\Phi_{1h}(x),\ x\in\omega^{(1)},$$

а на границе $\gamma^{(1)}=\partial\omega^{(1)}\setminus\gamma_S$ условию $y_1(x)=0$, $x\in\gamma^{(1)}$.

2) Сеточная функция y_2 удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$-\left(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1}-\left(a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2}+d_{2h}(x)q_2(y_2)=\Phi_{2h}(x),\ x\in\omega^{(2)},$$

а на границе $\gamma^{(2)}=\partial\omega^{(2)}\setminus\gamma_S$ условию $y_2(x)=0$, $x\in\gamma^{(2)}$.

3) Искомые функции y_1 и y_2 связаны между собой дополнительными условиями на $\gamma_S=\{x_1=\xi,x_2\in\omega_2\}$:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\overline{x}_1}(\xi,x_2)+\Phi_{3h}(x_2)y_1(\xi,x_2)\right]+d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))-\\&-\left(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2}=\Phi_{1h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)y_2(\xi,x_2),\ x\in\gamma_S,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)y_{2x_1}(\xi,x_2)-\Phi_{3h}(x_2)y_2(\xi,x_2)\right]+d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))-\\&-\left(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2}=\Phi_{2h}(\xi,x_2)+\frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)y_1(\xi,x_2),\ x\in\gamma_S.\end{aligned}$$

4. Дифференцируемость сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$

Для численной реализации [10] конечномерных задач оптимального управления необходимо прежде всего доказать дифференцируемость и Липшиц-непрерывность сеточного функционала аппроксимирующих сеточных задач (5)-(7).

Покажем, что функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по $\Phi_h=\left(\Phi_{1h},\Phi_{2h},\Phi_{3h}\right)$ на $U_{\alpha h}$, $\alpha=1,2,3$, в пространстве $\widetilde{B}_h=L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)\times L_\infty(\omega_2)$. Для этого возьмем произвольные управления Φ_h, $\Phi_h+\Delta\Phi_h\in U_h$. Пусть $y(\Phi_h)$ и $y(\Phi_h+\Delta\Phi_h)$ – соответствующие управлениям Φ_h и $\Phi_h+\Delta\Phi_h$ решения задачи (6), а $J_h(\Phi_h)$ и $J_h(\Phi_h+\Delta\Phi_h)$ — соответствующие значения функционала J_h. Обозначим $\Delta y(x)=y(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)-y(x;\Phi_h)$, $\Delta J_h(\Phi_h)=J_h(\Phi_h+\Delta\Phi_h)-J_h(\Phi_h)$.

Получим задачу, которой удовлетворяет приращение $\Delta y=\Delta y(x)$. Для этого перепишем сумматорное тождество, которому удовлетворяет решение задачи (6) для управления

$\Phi_h + \Delta\Phi_h$:

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Biggl(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1}(\Phi_h+\Delta\Phi_h) v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Biggl(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2}(\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2) y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\, v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\sum_{\omega_2}\bigl(\Phi_{3h}(x_2)+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\bigr)\bigl[y(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h)\bigr]\bigl[v(\xi,x_2)\bigr] h_2 +$$
$$+\Biggl(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))\, v_1(x) h_1 h_2 + \tag{8}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2) q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))\, v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\Biggl(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)) v_2(x) h_1 h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2) q_2(y_2(\xi,x_2))\, v_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) h_1 h_2\Biggr) =$$
$$=\Biggl(\sum_{\omega^{(1)}}\left(\Phi_{1h}(x)+\Delta\Phi_{1h}\right) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\left(\Phi_{1h}+\Delta\Phi_{1h}\right)(\xi,x_2)\, v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\Biggl(\sum_{\omega^{(2)}}\left(\Phi_{2h}(x)+\Delta\Phi_{2h}\right)\ v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\left(\Phi_{2h}+\Delta\Phi_{2h}\right)(\xi,x_2)\, v_2(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr).$$

Вычитая из (8) тождество (6), получим

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}\bigl(y_{1\overline{x}_1}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_1}(x;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 +$$
$$+\Biggl(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\bigl(y_{1\overline{x}_2}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_2}(x;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\bigl(y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h)\bigr) v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}\bigl(y_{2\overline{x}_1}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_1}(x;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 +$$
$$+\Biggl(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\bigl(y_{2\overline{x}_2}(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_2}(x;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\bigl(y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h) - y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2;\Phi_h)\bigr) v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Biggr)+$$
$$+\sum_{\omega_2}\Biggl\{\bigl(\Phi_{3h}(x_2)+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\bigr)\bigl[y(\Phi_h+\Delta\Phi_h)\bigr] - \Phi_{3h}(x_2)\bigl[y(\Phi_h)\bigr]\Biggr\}\bigl[v(\xi,x_2)\bigr] h_2 +$$

$$+\Big(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(x;\Phi_h))\big)v_1(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big(q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(x;\Phi_h))\big)v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big(q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Big)=$$

$$=\Big(\sum_{\omega^{(1)}}\Delta\Phi_{1h}(x)\,v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}}\Delta\Phi_{2h}(x)\,v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Big),$$
$$\forall v(x)\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Учитывая, что $y(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)=y(x;\Phi_h)+\Delta y(x)$, получим следующую задачу для приращения Δy:

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_1}\,v_{1\overline{x}_1}h_1h_2+\Big(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}\,v_{1\overline{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_1}\,v_{2\overline{x}_1}h_1h_2+\Big(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}\,v_{2\overline{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+\sum_{\omega_2}\Big\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]+$$

$$+\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]+\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\Big\}\big[v(\xi,x_2)\big]h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(x;\Phi_h))\big)v_1(x)h_1h_2+ \qquad (9)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big(q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_1(y_1(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_1(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(x;\Phi_h))\big)v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big(q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h+\Delta\Phi_h))-q_2(y_2(\xi,x_2;\Phi_h))\big)v_2(\xi,x_2)h_1h_2=$$
$$=\sum_{\omega^{(1)}}\Delta\Phi_{1h}(x)\,v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(2)}}\Delta\Phi_{2h}(x)\,v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2,$$

для любой сеточной функции $v=(v_1(\Phi_h),v_2(\Phi_h))\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}\,(\overline{\omega}^{(1,2)})$.

Далее, приращение функционала $J_h(\Phi_h)$ можно представить в виде:

$$\begin{gathered}\Delta J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h(\Phi_h) = \\ = \sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}} \left|y(x;\Phi_h) + \Delta y - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 \hbar_1\hbar_2 - \sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}} \left|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 \hbar_1\hbar_2 = \\ = 2\sum_{\overline{\omega}^{(1)}} \big(y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\big)\,\Delta y\,\hbar_1\hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}^{(1)}} \big(\Delta y\big)^2 \hbar_1\hbar_2.\end{gathered} \tag{10}$$

Для дальнейших преобразований формулы для приращения функционала (10) введем функцию $\psi \equiv \psi(x;\Phi_h)$ как решение вспомогательной краевой задачи (сопряженной задачи):

$$\begin{aligned}
&-\left(a_{1h}^{(1)}(x)\psi_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(1)}(x)\psi_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{1h}(x)\,q_{1y_1}\psi_1(x) = -2\left(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\right), \\
&\quad x\in\omega^{(1)}, \\
&\psi_1(x) = 0, \quad \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)}\setminus\gamma_S; \\
&\quad -\left(a_{1h}^{(2)}(x)\psi_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(2)}(x)\psi_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{2h}(x)\,q_{2y_2}\psi_2(x) = 0, \quad x\in\omega^{(2)}, \\
&\quad \psi_2(x) = 0, \quad x\in\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)}\setminus\gamma_S; \\
&\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_1}(\xi,x_2) + \Phi_{3h}(x_2)\psi_1(\xi,x_2)\right] + d_{1h}(\xi,x_2)\,q_{1y_1}\psi(\xi,x_2))- \\
&-\left(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} = -2\left(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\right) + \frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)\psi_2(\xi,x_2), \\
&\quad x\in\gamma_S = \{x_1=\xi, x_2\in\omega_2\}, \\
&-\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)\psi_{2x_1}(\xi,x_2) - \Phi_{3h}(x_2)\psi_2(\xi,x_2)\right] + d_{2h}(\xi,x_2)\,q_{2y_2}(\xi,x_2))- \\
&-\left(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} = \frac{2}{h_1}\Phi_{3h}(x_2)\psi_1(\xi,x_2), \quad x\in\gamma_S = \{x_1=\xi, x_2\in\omega_2\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Под решением сопряженной задачи (11) будем понимать функцию $\psi(\Phi_h) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, удовлетворяющую для $\forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству:

$$\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_1}v_{1\overline{x}_1}h_1h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_2}v_{1\overline{x}_2}h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_1}v_{2\overline{x}_1}h_1h_2 + \\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_2}v_{2\overline{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\,v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \\
+\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(x_2)\big[\psi(\xi,x_2)\big]\big[v(\xi,x_2)\big]h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_{1y_1}\psi_1(x)\,v_1(x)h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_{1y_1}(\xi,x_2)\psi_1(\xi,x_2)\,v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_{2y_2}\psi_2(x)\,v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_{2y_2}\psi_2(\xi,x_2)\,v_2(\xi,x_2)h_1h_2 = \\
= -2\sum_{\omega^{(1)}}\left(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\right)v_1(x)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\left(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\right)v_1(\xi,x_2)h_1h_2,
\end{gathered} \tag{12}$$

Покажем, что для приращения функционала справедливо представление

$$\begin{gathered}\Delta J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h(\Phi_h) = \\ = -\sum_{\omega^{(1)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{1h}(x)\,\psi_1(x)\,\hbar_1 h_2 - \sum_{\omega^{(2)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{2h}(x)\,\psi_2(x)\,\hbar_1 h_2 + \\ + \sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi, x_2, \Phi_h)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 + R_h,\end{gathered} \tag{13}$$

где $\quad R_h = \sum_{k=1}^{6} R_{hk}, \quad R_{h1} = \sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} \big(\Delta y_1\big)^2 \hbar_1 h_2;$

$$\begin{gathered}R_{h2} = \sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} d_{1h}(x)\psi_1(x)\big(q_1(y_1 + \Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1\big) h_1 h_2; \\ R_{h3} = \sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2} d_{2h}(x)\psi_2(x)\big(q_2(y_2 + \Delta y_2) - q_2(y_2) - q_{2y_2}\Delta y_2\big) h_1 h_2;\end{gathered} \tag{14}$$

$$R_{h4} = \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\psi_1(\xi, x_2)\Big(q_1(y_1 + \Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1(\xi, x_2)\Big) h_1 h_2;$$

$$R_{h5} = \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\psi_2(\xi, x_2)\Big(q_2(y_2 + \Delta y_2) - q_2(y_2) - q_{2y_2}\Delta y_2(\xi, x_2)\Big) h_1 h_2;$$

$$R_{h6} = \sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2.$$

Действительно, полагая в (9) $v = \psi$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_1}\psi_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}\psi_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)(\Delta y_1)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \\ + \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_1}\psi_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}\psi_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)(\Delta y_2)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \sum_{\omega_2}\Big\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi, x_2, \Phi_h)\big] + \\ + \Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2, \Phi_h)\big] + \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2, \Phi_h)\big]\Big\}\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 + \\ + \Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big(q_1(y_1(x; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(x; \Phi_h))\big)\psi_1(x) h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\big(q_1(y_1(\xi, x_2; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(\xi, x_2; \Phi_h))\big)\psi_1(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \\ + \Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big(q_2(y_2(x; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(x; \Phi_h))\big)\psi_2(x) h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\big(q_2(y_2(\xi, x_2; \Phi_h + \Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(\xi, x_2; \Phi_h))\big)\psi_2(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) =\end{gathered} \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\omega^{(1)}} \Delta\Phi_{1h}(x)\,\psi_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,\psi_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+ \sum_{\omega^{(2)}} \Delta\Phi_{2h}(x)\,\psi_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,\psi_2(\xi,x_2)h_1h_2.
\end{aligned}
$$

Далее, полагая в (12) $v = \Delta y$, получим

$$
\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_1}\Delta y_{1\overline{x}_1}h_1h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\psi_{1\overline{x}_2}\Delta y_{1\overline{x}_2}h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\psi_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\Delta y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_1}\Delta y_{2\overline{x}_1}h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\psi_{2\overline{x}_2}\Delta y_{2\overline{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\psi_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\Delta y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(x_2)\big[\psi(\xi,x_2)\big]\big[\Delta y(\xi,x_2)\big]h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_{1y_1}\psi_1(x)\Delta y_1(x)h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_{1y_1}(\xi,x_2)\psi_1(\xi,x_2)\Delta y_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_{2y_2}\psi_2(x)\Delta y_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_{2y_2}\psi_2(\xi,x_2)\Delta y_2(\xi,x_2)h_1h_2 = \\
= -2\sum_{\omega^{(1)}}\Big(y(x) - u_{0h}^{(1)}(x)\Big)\,\Delta y_1(x)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\Big(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\Big)\,\Delta y_1(\xi,x_2)h_1h_2.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Вычтем теперь из (15) равенство (16)

$$
\begin{gathered}
2\Bigg\{\sum_{\omega^{(1)}}\big(y(x) - u_{0h}^{(1)}\big)\,\Delta y_1\,h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\big(y(\xi,x_2) - u_{0h}^{(1)}(\xi,x_2)\big)\,\Delta y_1(\xi,x_2)\,h_1h_2\Bigg\} = \\
= \sum_{\omega_2}\Bigg\{\Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big] + \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\Bigg\}\big[\psi(\xi,x_2)\big]h_2 - \\
-\sum_{\omega^{(1)}}\Delta\Phi_{1h}(x)\psi_1(x)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,\psi_1(\xi,x_2)h_1h_2 - \\
-\sum_{\omega^{(2)}}\Delta\Phi_{2h}(x)\psi_2(x)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,\psi_2(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\psi_1(x)\Bigg(q_1(y_1(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(x;\Phi_h)) - q_{1y_1}\Delta y_1\Bigg)h_1h_2 + \\
+\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\psi_2(x)\Bigg(q_2(y_2(x;\Phi_h+\Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(x;\Phi_h)) - q_{2y_2}\Delta y_2\Bigg)h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\,\psi_1(\xi,x_2)\Bigg(q_1(y_1(\Phi_h+\Delta\Phi_h)) - q_1(y_1(\Phi_h)) - q_{1y_1}\Delta y_1\Bigg)h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\,\psi_2(\xi,x_2)\Bigg(q_2(y_2(\Phi_h+\Delta\Phi_h)) - q_2(y_2(\Phi_h)) - q_{2y_2}\Delta y_2\Bigg)h_1h_2.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Подставляя теперь (17) в (10), установим, что для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ справедливо представление (13) – (14).

Установим оценку для приращения Δy. Полагая в тождестве (9), которому удовлетворяет приращение, $v = \Delta y$ и принимая во внимание, что $\Phi_h = \big(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}\Phi_{3h}\big) \in U_h$, $\Phi_h + \Delta\Phi_h \in U_h$, установим

$$
\begin{gathered}
C\big\|\Delta y\big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \Big|\sum_{\omega^{(1)}} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| + \\
+\Big|\sum_{\omega^{(2)}} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| + \frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| + \\
+\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]h_2\Big|.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Оценим правую часть (18). Имеем

$$
\begin{gathered}
\Big|\sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} \Delta\Phi_{1h}\,\Delta y_1\,h_1h_2\Big| \leqslant \big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)}\|\Delta y_1\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)} \leqslant \\
\leqslant C\big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(1)}\times\omega_2)}\|\Delta y_1\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})};
\end{gathered}
$$

$$
\frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{1h}(\xi,x_2)\,\Delta y_1(\xi,x_2)\,h_1h_2\Big| \leqslant C\,\frac{1}{2}\big\|\Delta\Phi_{1h}\big\|_{L_2(\gamma_S)}\|\Delta y_1\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.
$$

Аналогично

$$
\begin{gathered}
\Big|\sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2} \Delta\Phi_{2h}\,\Delta y_2\,h_1h_2\Big| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_{2h}\big\|_{L_2(\omega_1^{(2)}\times\omega_2)}\|\Delta y_2\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}; \\
\frac{1}{2}\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{2h}(\xi,x_2)\,\Delta y_2(\xi,x_2)\,h_1h_2\Big| \leqslant C\,\frac{1}{2}\big\|\Delta\Phi_{2h}\big\|_{L_2(\gamma_S)}\|\Delta y_2\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Далее, пользуясь ранее полученным неравенством (см. [4], стр. 1777), получаем

$$
\begin{gathered}
\Big|\sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]\big[\Delta y(\xi,x_2,\Phi_h)\big]h_2\Big| \leqslant \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\times \\
\times\big\|[y]\big\|_{L_2(\gamma_S)}\big\|[\Delta y]\big\|_{L_2(\gamma_S)} \leqslant C\big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\|\Delta y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Принимая во внимание оценки (19), (20), из неравенства (18) находим желаемую оценку

$$
\big\|\Delta y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant C_0\Big\{\sum_{\alpha=1}^{2}\big\|\Delta\Phi_{\alpha h}\big\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)} + \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\Big\}.
\tag{21}
$$

Перейдем теперь к оценке решения сопряженной задачи (12).

Полагая в тождестве (12) $v=\psi$ и оценивая левую часть (12), получим

$$
C\big\|\psi\big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant 2\Big|\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2}\big(y(x;\Phi_h)-u_0^h(x)\big)\,\psi_1(x)\,h_1h_2\Big|.
\tag{22}
$$

Для правой части (22) нетрудно установить оценку

$$
2\Big|\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2}\big(y(x;\Phi_h)-u_0^h(x)\big)\,\psi_1\,h_1h_2\Big| \leqslant M_0\|y-u_0^h\|_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}\|\psi\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.
$$

Откуда имеем:

$$
\big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \overline{M}_0\|y-u_0^h\|_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}.
\tag{23}
$$

Для дальнейшей оценки правой части неравенства (23) следует воспользоваться ранее доказанным утверждением (см.[6], стр. 83):

$$\|y(\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M \sum_{\alpha=1}^{2} \|\Phi_{\alpha h}\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)},\ \forall \Phi_h \in U_h. \tag{24}$$

Тогда, в силу (24),

$$\sup_{\Phi_h\in U_h} \big\|y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M = \mathrm{Const},$$

и из (23) получаем

$$\big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \widetilde{M} = \mathrm{Const}, \qquad \forall \Phi_h \in U_h.$$

Перейдем теперь к оценке величины R_h в (13)-(14). Имеем

$$|R_{h2}| \leqslant \sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} \Big| d_{1h}(x)\psi_1(x)\big[q_1(y_1+\Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1 \Big| h_1 h_2.$$

Пусть на функцию $q(y)$ наложено дополнительное ограничение

$$\big|q'_s(s_1) - q'_s(s_2)\big| \leqslant \overline{L}_q |s_1 - s_2| \text{ для всех } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \overline{L}_q = \mathrm{Const} > 0.$$

Откуда легко получить следующее неравенство

$$\Big| q_i(y_i + \Delta y_i) - q_i(y_i) - q'_i(y_i)\Delta y_i \Big| \leqslant \frac{\overline{L}_q}{2} \big|\Delta y_i\big|^2, \quad i = 1, 2.$$

Тогда
$$|R_{h2}| \leqslant \frac{\overline{L}_q}{2}\, \overline{d}_0 \sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2} \big|\Delta y_1\big|^2 \big|\psi_1\big| h_1 h_2 \leqslant C \big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} \big\|\psi\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})};$$

$$|R_{h3}| \leqslant C \big\|\Delta y_2\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} \big\|\Delta\psi_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})};$$

$$\big|R_{h4}\big| = \left| \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\, \psi_1(\xi, x_2) \Big(q_1(y_1 + \Delta y_1) - q_1(y_1) - q_{1y_1}\Delta y_1 \Big) h_1 h_2 \right| \leqslant$$
$$\leqslant C \big\|\Delta\psi_1\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} \Big\{ \big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} + \big\|\Delta y_1\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} \Big\};$$

$$\big|R_{h5}\big| \leqslant C \big\|\Delta\psi_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} \Big\{ \big\|\Delta y_2\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} + \big\|\Delta y_2\big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} \Big\};$$

$$\big|R_{h1}\big| \leqslant \sum_{\omega_1^{+}\times\omega_2} \big|\Delta y_1\big|^2 \hbar_1 h_2 \leqslant C \big\|\Delta y_1\big\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})};$$

$$\Big|R_{h6}\Big| \leqslant \sum_{\omega_2} \Big| \Delta\Phi_{3h}(x_2)\big[\Delta y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] \Big| h_2 \leqslant$$
$$\leqslant \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)} \sum_{\omega_2} \Big| \big[\Delta y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] \Big| h_2 \leqslant$$
$$\leqslant C \big\|\Delta\Phi_{3h}\big\|_{L_\infty(\omega_2)} \big\|\Delta y\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \big\|\psi\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}.$$

Таким образом, для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ получено представление

$$\begin{aligned} \Delta J_h(\Phi_h) = &- \sum_{\omega^{(1)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{1h}\, \psi_1\, \hbar_1 h_2 - \sum_{\omega^{(2)}\cup\gamma_S} \Delta\Phi_{2h}\, \psi_2\, \hbar_1 h_2 + \\ &+ \sum_{\omega_2} \Delta\Phi_{3h}\big[y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big] h_2 + o\big(\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}\big), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$.

Нетрудно видеть, что приращение функционала $J_h(\Phi_h)$ можно записать также в следующем виде

$$\begin{gathered}\Delta J_h(\Phi_h) = \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \Delta\Phi_{1h}\right)_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \Delta\Phi_{2h}\right)_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \\ + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}, \Delta\Phi_{3h}\right)_{L_2(\omega_2)} + o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big),\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_h} = \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}\right), \\ \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}} = -\psi_1(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S, \quad \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}} = -\psi_2(x), \quad x \in \omega^{(2)} \cup \gamma_S; \\ \frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}} = \big[y(\xi, x_2)\big]\big[\psi(\xi, x_2)\big], \quad x_2 \in \omega_2.\end{gathered} \tag{27}$$

Формулу для приращения функционала $J_h(\Phi_h)$ можно теперь переписать в виде

$$\Delta J_h(\Phi_h) =< J_h'(\Phi_h), \Delta\Phi_h > + o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big), \tag{28}$$

где

$$\begin{gathered}< J_h'(\Phi_h), \Delta\Phi_h >= \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{1h}}, \Delta\Phi_{1h}\right)_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \\ + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{2h}}, \Delta\Phi_{2h}\right)_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \left(\frac{\partial J_h}{\partial \Phi_{3h}}, \Delta\Phi_{3h}\right)_{L_2(\omega_2)}.\end{gathered} \tag{29}$$

Таким образом, в формуле (28) для приращения функционала первое слагаемое является линейным ограниченным функционалом на $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$ относительно $\Phi_h = \big(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h}\big)$, а второе слагаемое имеет порядок $o\big(\|\Delta\Phi_h\|_{\widetilde{B}_h}\big)$. Это значит, что функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по Фреше на множестве U_h, в пространстве $\widetilde{B}_h$. При этом градиент функционала $J_h(\Phi_h)$ в точке $\Phi_h \in U_h$ имеет вид (27), причем первая компонента в (27) является как бы аналогом частной производной функционала $J_h(\Phi_h) = J_h(\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h})$ по переменной Φ_{1h}, вторая и третья компоненты — по переменным Φ_{2h} и Φ_{3h}, соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $q(s)$ определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям: $q(0) = 0$, $q(s)$ дифференцируема по s, первая производная $q_s'(s)$ удовлетворяет ограничениям*

$$0 < q_0 \leqslant q_s'(s) < L_q < \infty,$$

$$\big|q_s'(s_1) - q_s'(s_2)\big| \leqslant \overline{L}_q |s_1 - s_2| \ \textit{для всех}\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad L_q, \overline{L}_q = Const > 0.$$

Пусть $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$. Тогда сеточный функционал $J_h(\Phi_h)$ дифференцируем по Φ_h на U_h, по Фреше в пространстве $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)}\cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$, причем градиент $J_h'(\Phi_h)$ в точке $(\Phi_h) = (\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h})$ имеет вид (29), *(*27*).*

Можно показать, что сеточный функционал $J_h(\Phi_h)$ принадлежит классу $C^{1,1}(\widetilde{B}_h)$, где $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$, то есть

$$\big\|J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h)\big\| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}. \tag{30}$$

Действительно, используя ранее доказанные утверждения (см. [4], леммы 2.1-2.3, стр. 1776), для любого $\eta = \big(\eta_1, \eta_2, \eta_3\big) \in \widetilde{B}_h$, имеем

$$\Big| < J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta > \Big| =$$

$$= \Big| \sum_{\omega^{(1)} \cup \gamma_S} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{1h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{1h}} \right) \eta_1(x) \hbar_1 h_2 +$$

$$+ \sum_{\omega^{(2)} \cup \gamma_S} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{2h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{2h}} \right) \eta_2(x) \hbar_1 h_2 \Big| +$$

$$+ \sum_{\omega_2} \left(\frac{\partial J_h(\Phi_h + \Delta\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{3h}} - \frac{\partial J_h(\Phi_h; x)}{\partial \Phi_{3h}} \right) \eta_3(x) h_2 \Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \big\| \Delta\psi_1(\Phi_h) \big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} \big\| \eta_1 \big\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} + C_2 \big\| \Delta\psi_2(\Phi_h) \big\|_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} \big\| \eta_2 \big\|_{L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)} +$$

$$+ C_3 \big\| \eta_3 \big\|_{L_\infty(\omega_2)} \Big\{ \big\| y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} +$$

$$+ \big\| \Delta y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} + \big\| \Delta y \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \Big\}.$$

Установим оценку для приращения $\Delta\psi$. Для этого, используя ту же методику, что и при получении задачи (9), найдем задачу, которой удовлетворяет приращение $\Delta\psi = \psi(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - \psi(\Phi_h)$:

$$\begin{gathered}
\sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) (\Delta\psi_1)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\, v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) (\Delta\psi_2)_{\overline{x}_2}(\xi, x_2)\, v_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega_2} \Phi_{3h}(x_2) \big[\Delta\psi\big] \big[v\big] h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_{1y_1} \Delta\psi_1(x)\, v_1(x) h_1 h_2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_{1y_1} \Delta\psi_1(\xi, x_2)\, v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
+ \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_{1y_1} \Delta\psi_1(x)\, v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_{2y_2} \Delta\psi_2(\xi, x_2)\, v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 = \\
= -2 \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} \Delta y_1(x)\, v_1(\xi, x_2) \hbar_1 h_2, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}} (\overline{\omega}^{(1,2)}).
\end{gathered} \tag{31}$$

Полагая в тождестве (31) $v = \Delta\psi$, установим

$$C \big\| \Delta\psi \big\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant 2 \Big| \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} \Delta y_1(x)\, \Delta\psi_1(x) \hbar_1 h_2 \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_0 \| \Delta y_1 \|_{W_2^1(\omega_1^{(1)+} \times \omega_2)} \big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})},$$

то есть

$$\big\| \Delta\psi \big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \widetilde{C}_0 \Big(\sum_{\alpha=1}^{2} \| \Delta\Phi_{\alpha h} \|_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup \gamma_S)} + \| \Delta\Phi_{3h} \|_{L_\infty(\omega_2)} \Big) = \widetilde{C}_0 \big\| \Delta\Phi_h \big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Откуда получаем

$$\big|< J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta >\big| \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h} \times$$
$$\times\bigg(\big\|\eta_1\big\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)} + \big\|\eta_2\big\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)} + \big\|\eta_3\big\|_{L_\infty(\omega_2)}\bigg) = C\big\|\eta\big\|_{\widetilde{B}_h}\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Таким образом,

$$\big\|J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h)\big\| =$$
$$= \sup_{\eta\neq 0}\frac{\big|< J_h'(\Phi_h + \Delta\Phi_h) - J_h'(\Phi_h), \eta >\big|}{\big\|\eta\big\|_{\widetilde{B}_h}} \leqslant C\big\|\Delta\Phi_h\big\|_{\widetilde{B}_h}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*. Тогда сеточный функионал* $J_h(\Phi_h)$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(\widetilde{B}_h)$*, где* $\widetilde{B}_h = L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \times L_\infty(\omega_2)$*, то есть справедлива оценка (*30*).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений.* М.: Наука, 1976.
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
3. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа, 1985.
4. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р., Файрузов М.Э. *Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 54. № 11. 2014. С. 1767–1792.
5. Лубышев Ф.В. *О разностных аппроксимациях задач оптимального управления полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 52. № 8. 2012. С. 1378–1399.
6. Манапова А.Р., Лубышев Ф.В. *Оценка точности по состоянию конечномерных аппроксимаций задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями* // Уфимск. матем. журн. Т. 6. № 3. 2014. С. 72–87.
7. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
8. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973.
9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.
10. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002.

Айгуль Рашитовна Манапова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru

Федор Владимирович Лубышев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия