ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 34-60.

УДК 517.521+517.547.22

ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ВЕЛИЧИНЫ НИЖНЕГО ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0,1)$ С НУЛЯМИ ЗАДАННЫХ УСРЕДНЕННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Посвящается памяти профессора
Игоря Федоровича Красичкова–Терновского

Аннотация. Найдены точные двусторонние оценки величины нижнего типа при порядке $\rho \in (0,1)$ целых функций, корни которых имеют заданные верхнюю и нижнюю усредненные плотности и распределены либо произвольно в комплексной плоскости, либо на одном луче. Проведен анализ полученных результатов и сравнение их с известными фактами для обычного типа целой функции.

Ключевые слова: тип и нижний тип целой функции, верхняя и нижняя усредненные плотности последовательности нулей.

Mathematics Subject Classification: 30D15

1. Введение

Исследование зависимости роста целой функции от распределения ее нулей на комплексной плоскости имеет важное значение как в самой теории целых функций, так и во многих ее приложениях (теория интерполяции и аппроксимации экспонентами, проблема нахождения радиусов полноты систем экспонент и общих функциональных систем, спектральная теория операторов, теория вероятностей, негармонический анализ, вопросы аналитического продолжения сумм степенных рядов и рядов Дирихле). Достаточно полно эта зависимость была изучена уже к середине прошлого века в случае «регулярно» растущих функций с «правильно» распределенными нулями (см. работы Б. Я. Левина [1], А. Пфлюгера [2], [3]). Здесь асимптотические формулы для целой функции и ее нулей взаимно определяют друг друга. При отсутствии подобной регулярности асимптотические законы перестают действовать, и на первый план выходят задачи определения точных границ изменения характеристик роста функции в зависимости от границ скорости изменения нулей. Классическими характеристиками роста целых функций являются тип и нижний тип, а скорость изменения нулей измеряется плотностями их распределения. Приведем точные определения.

Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности и выписанная в порядке неубывания модулей. Пусть далее $n_\Lambda(r) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r} 1$ — считающая функция (с учетом кратностей) этой последовательности, а $N_\Lambda(r) := \int\limits_0^r \dfrac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt$

G.G. Braichev, The exact bounds of lower type magnitude for entire function of order $\rho \in (0,1)$ with zeros of prescribed average densities.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281).

Поступила 22 октября 2015 г.

— ее интегральная, или усредненная, считающая функция. Без ущерба для общности мы предполагаем, что $0 \notin \Lambda$.

Зададим $\rho > 0$. Верхняя и нижняя плотности при показателе ρ (ρ-плотности) последовательности Λ определяются равенствами соответственно

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Верхняя и нижняя усредненные ρ-плотности последовательности Λ определяются аналогичными равенствами

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Типом целой функции $f(z)$ при порядке ρ (коротко, ρ-типом) называют величину

$$\sigma_\rho(f) := \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|\,.$$

Замена в этом равенстве верхнего предела на нижний приводит к определению нижнего ρ-типа целой функции, который будем обозначать $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Хорошо известны следующие точные оценки (см., например, [1, гл. 4, §1], [4]):

$$\frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho\, e} \leqslant \sigma_\rho(f) \leqslant \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda), \tag{1}$$

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \sigma_\rho(f) \leqslant \frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}\, \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\,. \tag{2}$$

Оценки сверху в (1), (2) справедливы при $\rho \in (0,1)$, причем достигаются в случае, когда все нули функции расположены на одном луче, и для них в определении ρ-плотностей существуют обычные пределы (такие последовательности называют измеримыми). Оценки же снизу действуют при любом $\rho > 0$ и достигаются на довольно сложно устроенной последовательности комплексных чисел с равномерно распределенными на $[0, 2\pi]$ аргументами.

Увеличивается ли нижняя граница для ρ-типа целой функции при учете не только верхней, но и нижней ρ-плотности ее нулей? Положительный ответ на этот вопрос вытекает из общего неравенства, приведенного в книге [5, с. 16]:

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho} \exp\left\{\frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)} - 1\right\}. \tag{3}$$

Долгое время считалось, что оценка (3) точна, но только недавно А. Ю. Попов [6, теорема 2.1] построил пример, обеспечивающий в (3) равенство и показывающий к тому же, что нижняя оценка (2) не может быть улучшена за счет учета нижней усредненной ρ-плотности нулей. Сказанное позволяет представить ответы к следующим экстремальным задачам.

Зафиксируем числа $\rho > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$. Тогда справедливы равенства

$$s_{\mathbb{C}}(\beta;\, \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} = \frac{\beta}{\rho\, e}, \tag{4}$$

$$s^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\, \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\} = \beta^*, \tag{5}$$

$$s_{\mathbb{C}}(\alpha,\, \beta;\, \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha\right\} = \frac{\beta}{\rho\, e}\, e^{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{6}$$

$$s^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*, \beta^*;\, \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C}, \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*,\, \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geq \alpha^*\right\} = \beta^*. \tag{7}$$

Как отмечалось выше, оценки сверху в (1) , (2) достигаются для целых функций с измеримыми нулями, расположенными на одном луче. Насколько уточняются оценки снизу в (1) — (3), если корни целой функции также лежат на одном луче? Именно для фиксированных чисел $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ требуется вычислить величины

$$s_{\mathbb{R}_+}(\beta;\,\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}, \tag{8}$$

$$s_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\,\beta;\,\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}, \tag{9}$$

$$s^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\,\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}, \tag{10}$$

$$s^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f): \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geq \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}. \tag{11}$$

Экстремальные задачи (8) — (11) решены совсем недавно.

Теорема A (А. Ю. Попов [7]). *При любых $\rho \in (0,1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство*

$$s_{\mathbb{R}_+}(\beta;\,\rho) \;=\; \beta\, C(\rho),$$

где $C(\rho) = \max\limits_{a>0} \dfrac{\ln(1+a)}{a^\rho}$. Нижняя грань $s_{\mathbb{R}_+}(\beta;\,\rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

По поводу задачи (8) см. также [8], [9].

Теорема B (В. Б. Шерстюков [10]). *Для произвольного $\rho \in (0,1)$ и любых чисел $\beta > 0$ и $\alpha \in [0,\beta]$ имеет место равенство*

$$s_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\,\beta;\,\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha\,/\beta)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau.$$

Нижняя грань $s_{\mathbb{R}_+}(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\widetilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta$.

Переход от обычных плотностей к усредненным потребовал привлечения результатов тауберова типа, что вызвало появление корней некоторого трансцендентного уравнения (см. [11]).

Теорема C (Г. Г. Брайчев [12], [13]).

I. *При фиксированных $\rho \in (0,1)$ и $\beta^* > 0$ экстремальная величина (10) находится по формуле*

$$s^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\,\rho) \;=\; C(\rho)\rho e\beta^*,$$

где функция $C(\rho)$ определена в теореме A.

II. *При фиксированных $\rho \in (0,1)$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ экстремальная величина (11) вычисляется по формуле*

$$s^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) = \rho\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0}\int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\rho} - \alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau\right), \tag{12}$$

где $a_1 = a_1(\alpha^*,\beta^*)$ и $a_2 = a_2(\alpha^*,\beta^*)$, $a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2$, — корни уравнения

$$a\ln\frac{e}{a} = \alpha^*/\,\beta^*. \tag{13}$$

Величина $s^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho)$ достигается для некоторой целой функции с нулями $\Lambda_f = \widetilde{\Lambda}$ такими, что $\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha^*$ и $\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta^*$.

По поводу задач (10), (11) см. также [14]–[17]. Обратим внимание на то, что в отличие от случая общего расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{C}$, учет нижней усредненной ρ-плотности существенно изменяет величину минимально возможного ρ-типа целых функций, когда $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$.

Подводя итог, можно сказать, что влияние основных плотностных характеристик последовательности нулей Λ_f из $\mathbb{C}$ или из $\mathbb{R}_+$ целой функции $f(z)$ на величину ее типа полностью изучено. С другой стороны, как показано в статье В. С. Азарина [18] (см. также обзор [19]), целая функция с измеримой последовательностью нулей может не иметь совершенно регулярного роста модуля, т. е. величины ее типа и нижнего типа могут не совпадать. Для полноценного описания поведения даже таких функций $f(z)$ с известной плотностью нулей требуется знать точный диапазон изменения не только типа $\sigma_\rho(f)$, но и нижнего типа $\underline{\sigma}_\rho(f)$. Исследованию экстремальных задач, включающих нижний индикатор и нижний тип целых функций при заданном диапазоне изменения плотностных характеристик нулей, посвящены работы А. А. Гольдберга [20], [21], А. А. Кондратюка [22], В. С. Азарина [23]. Отметим также результаты И. Ф. Красичкова-Терновского, связанные с оценками снизу для целых функций конечного порядка через близкую усредненную характеристику распределения нулей — индекс концентрации (см., например, [24]). Однако, самым естественным задачам, связанным с нижним типом при фиксированных значениях плотностей, уделялось гораздо меньше внимания. Недостаток же фактов общей теории побуждает к поиску частных ответов в каждой конкретной ситуации. Подтверждение этому можно найти в известной монографии А. Ф. Леонтьева [25, гл. VI, § 2, с. 405–409].

Работа посвящена нахождению точных двусторонних оценок нижнего типа целой функции с положительными или произвольно расположенными на плоскости нулями заданных усредненных плотностей. Приведем вначале известное соотношение

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geq \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \geq \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho}, \tag{14}$$

которое вытекает непосредственно из формулы Иенсена и неравенств, связывающих обычные и усредненные плотности. Некоторые оценки предварительного характера для нижнего ρ-типа функции $f(z)$ с $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ даны в работе [17]. Оценки сверху нижнего ρ-типа через нижние ρ-плотности, подобные верхним оценкам из (1), (2), в математической литературе вообще отсутствуют. В работе [26] найдено объяснение этому факту. Именно, доказана принципиальная невозможность оценки сверху нижнего типа только через нижнюю плотность. Из нашей теоремы 5 также следует, что нельзя оценить сверху нижний ρ-тип только через нижнюю усредненную ρ-плотность. Однако, оценки нижнего ρ-типа сверху, учитывающие обе ρ-плотности, возможны, и в [26] доказан такой точный результат, утверждающий дополнительно, что наибольшая возможная величина нижнего ρ-типа не зависит от расположения нулей целой функции на плоскости.

Теорема D (Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова [26]). *Для произвольного порядка $\rho \in (0,1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$ ($\alpha \leqslant \beta$) справедливы равенства*

I.

$$\sup\left\{\underline{\sigma}_\rho(f) :\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} =$$

$$= \sup\left\{\underline{\sigma}_\rho(f) :\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\} =: \underline{S}(\alpha,\, \beta;\, \rho).$$

II.

$$\underline{S}(\alpha,\, \beta;\, \rho) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} - \sup_{a>0} \int\limits_a^{a(\beta/\alpha)^{1/\rho}} \frac{\beta\tau^{-\rho} - \alpha a^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau.$$

Верхняя грань $\underline{S}(\alpha,\,\beta;\,\rho)$ *достигается на некоторой возрастающей последовательности* $\widetilde{\Lambda}$, *у которой* $\underline{\Delta}_{\,\rho}(\widetilde{\Lambda})=\alpha$ *и* $\overline{\Delta}_{\rho}(\widetilde{\Lambda})=\beta$.

В настоящей работе мы завершаем полное описание роста целой функции порядка $\rho\in(0,1)$ при нерегулярном поведении ее нулей, заполняя вакуум в информации об оценках нижнего ρ-типа. Точнее, мы находим неулучшаемые оценки нижнего ρ-типа и снизу и сверху через усредненные ρ-плотности корней, решая экстремальные задачи в двух принципиальных случаях: корни функции лежат на одном луче; корни функции произвольно распределены на плоскости. Речь идет о следующих экстремальных задачах.

Пусть заданы числа $\rho>0$, $\beta^*>0$ и $\alpha^*\in[0,\beta^*]$. Требуется вычислить экстремальные величины:

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*;\,\rho):=\inf\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\ \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)=\alpha^*\right\},\tag{15}$$

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho):=\inf\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\ \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)\,=\,\alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)\leqslant\beta^*\right\},\tag{16}$$

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*\,;\rho):=\inf\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\ \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)=\alpha^*\right\},\tag{17}$$

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho):=\inf\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)=\alpha^*,\overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)\leqslant\beta^*\right\},\tag{18}$$

$$\underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho):=\sup\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{C},\,\underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)=\alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)\leqslant\beta^*\right\},\tag{19}$$

$$\underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho):=\sup\left\{\underline{\sigma}_{\,\rho}(f):\Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)=\alpha^*,\overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda)\leqslant\beta^*\right\}.\tag{20}$$

В § 2 мы решаем экстремальные задачи (15)–(18). Из полученных нами результатов следует, что наименьшие возможные значения нижнего ρ-типа в каждом из указанных случаев расположения нулей на плоскости не зависят от верхней усредненной ρ-плотности. Этот вывод непосредственно вытекает из теорем 1, 2.

Теорема 1. *Пусть* $\rho>0$. *Для любых фиксированных чисел* $\alpha^*\ge 0$ *и* $\beta^*\ge\alpha^*$ *справедливы равенства*

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*;\,\rho)\,=\,\underline{s}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*\,,\beta^*;\,\rho)\,=\,\alpha^*.$$

При любом значении $\beta^*\ge\alpha^*$ *существует последовательность* $\widetilde{\Lambda}\subset\mathbb{C}$ *с усредненными* ρ*-плотностями* $\underline{\Delta}^*{}_{\rho}(\widetilde{\Lambda})=\alpha^*$ *и* $\overline{\Delta}^*{}_{\rho}(\widetilde{\Lambda})=\beta^*$, *на которой нижние грани достигаются.*

Теорема 2. *Пусть* $\rho\in(0,1)$. *Для любых фиксированных чисел* $\alpha^*\ge 0$ *и* $\beta^*\ge\alpha^*$ *справедливы равенства*

$$\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*;\,\rho)\,=\,\underline{s}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho)\,=\,\frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}\,\alpha^*.$$

При любом значении $\beta^*\ge\alpha^*$ *существует возрастающая последовательность* $\widetilde{\Lambda}\subset\mathbb{R}_+$ *с усредненными* ρ*-плотностями* $\underline{\Delta}^*{}_{\rho}(\widetilde{\Lambda})=\alpha^*$ *и* $\overline{\Delta}^*{}_{\rho}(\widetilde{\Lambda})=\beta^*$, *на которой нижние грани достигаются.*

В § 3 решаются экстремальные задачи (19), (20), из которых следует, что наибольший возможный нижний ρ-тип целой функции, как и в случае обычных ρ-плотностей, не зависит от расположения нулей на плоскости, но зависит от обеих усредненных ρ-плотностей. Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого* $\rho\in(0,1)$ *и любых фиксированных чисел* $\alpha^*\ge 0$ *и* $\beta^*\ge\alpha^*$ *справедливы равенства*

$$\underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*\,,\beta^*;\,\rho)\,=\,\underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\,\rho)\,=\,\rho\,\beta^*\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\,-\,\sup_{b>0}\;\Phi(b)\right),$$

где

$$\Phi(b) = \int\limits_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{b} \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau + \int\limits_{b}^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau = \rho \int\limits_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \tau^{-\rho-1} \ln \frac{\tau+1}{b+1}\, d\tau,$$

и a_1, a_2 *— корни уравнения* $a \ln \dfrac{e}{a} = \alpha^*/\beta^*$ $(0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant e)$. *Верхние грани достигаются на некоторой возрастающей последовательности* $\widetilde{\Lambda}$, *у которой* $\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \alpha^*$ *и* $\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda}) = \beta^*$.

В последнем параграфе анализируется экстремальная величина из теоремы 3, даются простые двусторонние оценки этой величины. Обосновывается также вывод о невозможности получения оценки сверху нижнего ρ-типа функции только через нижнюю усредненную ρ-плотность ее корней.

2. Оценки снизу нижнего ρ-типа целой функции

Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho > 0$, $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$ — фиксированные числа, а $f(z)$ — целая функция порядка ρ с произвольно расположенными на комплексной плоскости нулями $\Lambda_f = \Lambda$ усредненных ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \leqslant \beta^*$. Из классической формулы Иенсена вытекает неравенство

$$\ln \max_{|z|=r} |f(z)| \geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = N_\Lambda(r),$$

которое после деления на r^ρ и перехода к нижнему пределу при $r \to +\infty$ приводит к оценке

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geq \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^*. \tag{21}$$

Для завершения доказательства теоремы надо при любых значениях параметров $\rho > 0$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0, \beta^*]$ построить такую целую функцию $\tilde{f}(z)$, нижний ρ-тип которой удовлетворял бы равенству $\underline{\sigma}_\rho(\tilde{f}) = \alpha^*$.

Если $\alpha^* = 0$, то, применяя известное неравенство $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)/\rho \leqslant \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \alpha^* = 0$, имеем $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$. Но, как показано в работе [26], каждая целая функция с нулевой нижней ρ-плотностью корней имеет нулевой нижний ρ-тип.

Пусть теперь $\alpha^* > 0$. Из теоремы 2.1 работы А. Ю. Попова [6] извлекаем, что для любых $\rho > 0$ и $k \in (0, 1]$ существует целая функция $f_0(z)$ с нулевым множеством Λ_0, удовлетворяющая условиям

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0) = \frac{k}{\rho}, \quad \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0) = \frac{e^{k-1}}{\rho}.$$

Кроме того, в доказательстве этой теоремы показано (см. [6, формула (2.23)]), что для неограниченного множества значений r_s выполняется соотношение

$$\frac{\ln \max\limits_{|z|=r_s} |f_0(z)|}{r_s^\rho} = \frac{k}{\rho} + o(1), \qquad r_s \to +\infty.$$

Отсюда с учетом (21) следует равенство $\underline{\sigma}_\rho(f_0) = \dfrac{k}{\rho}$.

Пользуясь тем, что функция $\dfrac{e^{x-1}}{x}$ на промежутке $(0,1]$ убывает от $+\infty$ до 1, найдем $k\in(0,1]$ из условия $\dfrac{e^{k-1}}{k}=\dfrac{\beta^*}{\alpha^*}$. Для числа $q=\dfrac{\alpha^*\rho}{k}$ рассмотрим функцию $\tilde f(z)=f_0(q^{1/\rho}z)$. Ее нулевое множество $\tilde\Lambda=q^{-1/\rho}\Lambda_0$ имеет усредненную считающую функцию $N_{\tilde\Lambda}(r)=N_{\Lambda_0}\left(q^{1/\rho}r\right)$. Поэтому выполняются следующие равенства

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)=q\,\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0)=q\,\frac{k}{\rho}=\alpha^*,$$

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)=q\,\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_0)=q\,\frac{e^{k-1}}{\rho}=q\,\frac{k}{\rho}\,\frac{e^{k-1}}{k}=\alpha^*\frac{\beta^*}{\alpha^*}=\beta^*.$$

Нетрудно подсчитать и нижний ρ-тип функции $\tilde f(z)$:

$$\underline{\sigma}_\rho(\tilde f)=q\,\underline{\sigma}_\rho(f_0)=q\,\frac{k}{\rho}=\alpha^*.$$

Подводя итог, заключаем, что функция $\tilde f(z)$ обладает характеристиками роста

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)=\alpha^*,\qquad \overline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)=\beta^*,\qquad \underline{\sigma}_\rho(\tilde f)=\alpha^*,$$

т. е. является экстремальной в задачах (15), (16). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Зададим числа $\rho\in(0,1)$, $\alpha^*\ge 0$ и $\beta^*\ge\alpha^*$. Пусть целая функция $f(z)$ имеет нижний ρ-тип $\underline{\sigma}_\rho(f)$ и положительные корни $\Lambda_f=\Lambda$ с усредненными ρ-плотностями $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\leqslant\beta^*$.

Докажем сначала неравенство

$$\underline{\sigma}_\rho(f)\ \ge\ \frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}\,\alpha^*. \tag{22}$$

Будем опираться на следующее представление, полученное в [15]:

$$r^{-\rho}\ln\max_{|z|=r}|f(z)|=\int\limits_0^{+\infty}\varphi_r(t)\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt, \tag{23}$$

где обозначено $\varphi_r(t):=\dfrac{N_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Из определения усредненных ρ-плотностей последовательности Λ следует, что $\varphi_r(t)$ ограничена и можно найти число $c>0$ так, чтобы для всех значений $t\ge\dfrac{c}{r}$ выполнялось неравенство $\varphi_r(t)\ge\alpha^*_\varepsilon:=\dfrac{\alpha^*}{1+\varepsilon}$. Интеграл в правой части (23) преобразуем и оценим следующим образом:

$$\int\limits_0^{+\infty}\varphi_r(t)\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt\ \ge\ \alpha^*_\varepsilon\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt+\int\limits_0^{c/r}(\varphi_r(t)-\alpha^*_\varepsilon)\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt=$$

$$=\alpha^*_\varepsilon\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt+o(1)=\frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}\,\alpha^*_\varepsilon+o(1),\quad r\to+\infty.$$

Мы воспользовались известным равенством (см. [29, раздел 2.29, № 24, с. 311])

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^\rho}{(1+t)^2}\,dt=\frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}.$$

Таким образом, из (23) и доказанных неравенств получаем

$$r^{-\rho}\ln\max_{|z|=r}|f(z)| \,\geq\, \frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}\,\alpha^*_\varepsilon \,+\, o(1), \quad r\to+\infty.$$

Переходя здесь к нижнему пределу при $r\to+\infty$, а затем устремив ε к нулю, приходим к неравенству (22).

Покажем теперь, что существует функция $\tilde f(z)$ с положительными нулями $\Lambda_f \,=\, \tilde\Lambda$, реализующая равенство в (22). Для этого при любых $\rho\in(0,1)$, $\beta^*>0$ и $\alpha^*\in[0,\beta^*]$ достаточно построить однозначно определяющую последовательность нулей $\tilde\Lambda$ усредненную считающую функцию $N_{\tilde\Lambda}(r)$ так, чтобы

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)\,=\,\alpha^*, \qquad \overline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda)\,=\,\beta^*, \qquad \underline{\sigma}_\rho(\tilde f)=\frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\,\rho}\,\alpha^*.$$

В работе [16] сконструирован пример целой функции с нулями заданных усредненных ρ-плотностей, расположенными в угле раствора 2θ, имеющей наименьший возможный ρ-тип. При $\theta\,=\,0$ нули такой функции лежат на луче. Покажем, что в этом случае она реализует не только наименьший возможный ρ-тип, но одновременно и наименьший возможный нижний ρ-тип. Опишем принцип построения усредненной считающей функции $N_{\tilde\Lambda}(r)$ последовательности нулей $\tilde\Lambda$ из работы [16, §3] (иной подход к построению подобных примеров использован ранее в [12], [15]).

Пусть ξ_n — некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$\xi_n \,=\, o(\xi_{n+1}), \quad n\to+\infty, \tag{24}$$

и a_1, a_2 — корни уравнения $a\ln\dfrac{e}{a} \,=\, \alpha^*/\,\beta^*$ $(0\leqslant a_1\leqslant 1\leqslant a_2\leqslant e)$. Величина $N_{\tilde\Lambda}(t)$ на каждом отрезке $[\xi_n a_2^{-1/\rho},\,\xi_n a_1^{-1/\rho}]$ определяется формулами

$$N_{\tilde\Lambda}(t)=\beta^*\xi_n^\rho+\rho\,\beta^*\,\xi_n^\rho\ln\frac{t}{\zeta_n}, \qquad t\in[\xi_n a_2^{-1/\rho},\,\xi_n a_1^{-1/\rho}], \quad n\in\mathbb{N},$$

а вне этих отрезков — как непрерывная функция, достаточно быстро приближающаяся к функции $y\,=\,\alpha^* t^\rho$, $t>0$, и удовлетворяющая оценке

$$N_{\tilde\Lambda}(t)\leqslant\alpha^* t^\rho, \qquad t\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\xi_n a_2^{-1/\rho},\,\xi_n a_1^{-1/\rho}].$$

Обозначим

$$\varphi(a)=\int\limits_{a a_1^{1/\rho}}^{a a_2^{1/\rho}}\frac{\beta^* a^{-\rho}-\alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau\,+1}\,d\tau, \quad a>0.$$

Нетрудно показывается, что функция $\varphi(a)$ обладает свойствами

$$\varphi(0+)\,=\,\varphi(+\infty)\,=\,0. \tag{25}$$

В [16, §3] получено соотношение

$$\tilde\sigma(r):=r^{-\rho}\,\ln\max_{|z|=r}\left|\tilde f(z)\right|\,\leqslant\,\rho\left(\frac{\pi\,\alpha^*}{\sin\pi\rho}\,+\,\varphi\left(\frac{r}{\xi_n}\right)+\varphi\left(\frac{r}{\xi_{n+1}}\right)\right)\,+\,o(1),$$

справедливое для $r\in[\xi_n,\,\xi_{n+1}]$, $n\to\infty$. В отличие от оценки работы [16], мы полагаем здесь $r=r_n\,=\,\sqrt{\xi_n\,\xi_{n+1}}$, что теперь дает

$$\tilde\sigma(r_n)\,\leqslant\,\rho\left(\frac{\pi\,\alpha^*}{\sin\pi\rho}\,+\,\varphi\left(\sqrt{\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}}\right)+\varphi\left(\sqrt{\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}}\right)\right)\,+\,o(1), \quad n\to\infty.$$

Привлекая свойства (24), (25), получаем

$$\underline{\sigma}_{\rho}(\tilde{f}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \tilde{\sigma}(r_n) \leqslant \frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\rho}\,\alpha^*.$$

Это вместе с неравенством (22), справедливым для любой целой функции $f(z)$ с положительными нулями $\Lambda_f = \Lambda$ усредненных ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \leqslant \beta^*$, приводит к требуемому результату

$$\underline{\sigma}_{\rho}(\tilde{f}) = \frac{\pi\,\rho}{\sin\pi\rho}\,\alpha^*.$$

Теорема 2 доказана.

3. Оценки сверху нижнего ρ-типа целой функции

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Пусть заданы числа $\rho \in (0,1)$, $\alpha^* \geq 0$ и $\beta^* \geq \alpha^*$. Неравенство

$$\underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) \geq \underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho),\ \text{или}$$

$$\sup\left\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\, \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*,\, \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\} \geq$$

$$\geq \sup\left\{\underline{\sigma}_{\rho}(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\, \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \alpha^*,\, \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) \leqslant \beta^*\right\}$$

очевидно, поскольку множество функций, по которому берется первый супремум, шире множества функций в определении второго. Проверим верность противоположного неравенства. Каждая целая функция $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$, нулевое множество которой совпадает с $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} = \Lambda_f \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, представляется бесконечным произведением

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Обозначим $|\Lambda| = (|\lambda_n|)_{n=1}^{\infty}$ и $f_+(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{|\lambda_n|}\right)$. Тогда

$$\max_{|z|=r}|f(z)| = \max_{|z|=r}\prod_{n=1}^{\infty}\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \leqslant \max_{|z|=r}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n|}\right) = \max_{|z|=r}|f_+(z)|\,.$$

Отсюда

$$\underline{\sigma}_{\rho}(f) = \varliminf_{r\to+\infty} r^{-\rho}\ln\max_{|z|=r}|f(z)| \leqslant \varliminf_{r\to+\infty} r^{-\rho}\ln\max_{|z|=r}|f_+(z)| = \underline{\sigma}_{\rho}(f_+),$$

причем

$$|\Lambda| \subset \mathbb{R}_+, \qquad \underline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_{\rho}(|\Lambda|), \qquad \overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \overline{\Delta}^*_{\rho}(|\Lambda|).$$

Поэтому

$$\underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) \leqslant \underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho),$$

и требуемое равенство $\underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\beta^*,\rho) = \underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*,\rho)$ доказано. Первое утверждение теоремы сводит нахождение наибольшей возможной величины нижнего ρ-типа целой функции порядка меньше единицы по верхней и нижней усредненным ρ-плотностям ее корней, распределенных произвольно в $\mathbb{C}$, к случаю расположения их на одном луче. Общее значение этих экстремальных величин будем ради краткости обозначать

$$\underline{S}^*(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) := \underline{S}^*{}_{\mathbb{C}}(\alpha^*,\,\beta^*;\,\rho) = \underline{S}^*{}_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*,\beta^*;\rho).$$

Для вычисления этой экстремальной величины докажем вначале, что при любых $\beta^*>0$ и $\alpha^*\in[0,\beta^*]$ нижний ρ-тип каждой целой функции $f(z)$ порядка меньше единицы с нулями $\Lambda_f=\Lambda$ усредненных ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\leqslant\beta^*$ удовлетворяет неравенству

$$\underline{\sigma}_\rho(f)\leqslant\rho\beta^*\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\sup_{b>0}\Phi(b)\right), \tag{26}$$

где

$$\Phi(b)=\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b}\frac{\tau^{-\rho}-a_2b^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\;+\int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}}\frac{\tau^{-\rho}-a_1b^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\,,$$

а a_1 и a_2 — корни уравнения (13).

Рассмотрим три случая 1) $\alpha^*=0$, 2) $\alpha^*=\beta^*$, 3) $\alpha^*\in(0,\beta^*)$.
В первом случае корнями уравнения (13) являются числа $a_1=0$, $a_2=e$, и оценка (26) принимает вид

$$\underline{\sigma}_\rho(f)\leqslant\rho\beta^*\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\sup_{b>0}\left\{\int\limits_{be^{-1/\rho}}^{b}\frac{\tau^{-\rho}-eb^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\;+\int\limits_{b}^{+\infty}\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\right\}\right)=$$

$$=\rho\,\beta^*\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\sup_{b>0}\left\{\int\limits_{be^{-1/\rho}}^{+\infty}\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau\;-eb^{-\rho}\int\limits_{be^{-1/\rho}}^{b}\frac{d\tau}{\tau+1}\right\}\right)=$$

$$=\rho\,\beta^*\inf_{b>0}\left(\int\limits_{0}^{be^{-1/\rho}}\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau+eb^{-\rho}\ln\frac{1+b}{1+be^{-1/\rho}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\rho\,\beta^*\lim_{b\to+0}\left(\int\limits_{0}^{be^{-1/\rho}}\frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau+eb^{-\rho}\ln\frac{1+b}{1+be^{-1/\rho}}\right)\;=\;0.$$

Таким образом, в случае $\alpha^*=0$ требуется доказать, что $\underline{\sigma}_\rho(f)\;=\;0$. Но импликация

$$\alpha^*=0\quad\Rightarrow\quad\underline{\sigma}_\rho(f)\;=\;0$$

уже была доказана в теореме 1.

Рассмотрим второй случай $\alpha^*\;=\;\beta^*$, когда последовательность нулей целой функции измерима. Теперь оба корня a_1 и a_2 уравнения (13) совпадают с единицей, и интегралы в определении функции $\Phi(b)$ исчезают. Соотношение (26) сводится к неравенству

$$\underline{\sigma}_\rho(f)\leqslant\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,\beta^*, \tag{27}$$

которое содержится в известной оценке (2). При этом, если последовательность Λ измерима с усредненной ρ-плотностью Δ^*_ρ и расположена на одном луче, то, как известно, выполняется равенство

$$\underline{\sigma}_\rho(f)=\sigma_\rho(f)=\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,\Delta^*_\rho.$$

Таким образом, при $\alpha^*\;=\;\beta^*$ справедливость теоремы 3 проверена.

Стоит отметить также, что если измеримая последовательность нулей целой функции расположена произвольно на комплексной плоскости, то неравенство (27) может оказаться строгим. В этом нас убеждает пример функции $f_0(z)$ из теоремы 1, в котором при $\alpha^*\;=\;\beta^*$ имеем $k=1$ и

$$\underline{\sigma}_\rho(f_0)=\sigma_\rho(f_0)=\beta^*\;<\;\beta^*\,\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}.$$

Осталось рассмотреть центральный случай теоремы, когда последовательность нулей $\Lambda_f = \Lambda$ с усредненной считающей функцией $N_\Lambda(r) = N(r)$ такова, что $0 < \alpha^* < \beta^*$. Из определения усредненных ρ-плотностей Λ вытекает существование для произвольного $\varepsilon > 0$ такого числа $c > 0$, что для всех значений $r \geq c$ выполняются неравенства

$$\alpha^*(1-\varepsilon)\, r^\rho \; < \; N(r) \; < \; \beta^*(1+\varepsilon)\, r^\rho,$$

а для некоторой последовательности $r_k \nearrow +\infty$ имеем

$$N(r_k) \; < \; \alpha^*(1+\varepsilon)\, r_k^\rho.$$

Нам удобней перейти к считающим функциям $n_1(x) := n(e^x)$ и $N_1(x) := N(e^x)$. Очевидно, $N_1(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\alpha^*(1-\varepsilon)\, e^{\rho x} \; < \; N_1(x) \; < \; \beta^*(1+\varepsilon)\, e^{\rho x}, \qquad x > \ln c, \tag{28}$$

$$N_1(x_k) \; < \; \alpha^*(1+\varepsilon)\, e_k^{\rho x_k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad x_k = \ln r_k. \tag{29}$$

Для дальнейших оценок удобно обозначить $A = \alpha^*(1+\varepsilon)$, $B = \beta^*(1+\varepsilon)$, $y_{_A}(x) = Ae^{\rho x}$, $y_{_B}(x) = Be^{\rho x}$ и воспользоваться следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 1. *Пусть $A < B$, и из точки $(x_0,\, Ae^{\rho x_0})$ проведены влево и вправо от нее касательные к графику функции $y_{_B}(x)$. Тогда абсциссы левой и правой точек касания x_l и x_r задаются соответственно формулами*

$$x_l \; = \; x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_1, \quad x_r \; = \; x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_2, \tag{30}$$

где a_1 и a_2 — корни уравнения (13).

Доказательство леммы. Для нахождения требуемых точек вычислим различными способами угловые коэффициенты касательных к графику $G_{_B}$, проходящих через точку $(x_0,\, e^{Ax_0})$. Имеем, например, для правой точки касания (для левой вычисления аналогичны)

$$\frac{Be^{\rho\, x_r} - Ae^{\rho\, x_0}}{x_r - x_0} = B\, \rho\, e^{\rho\, x_r}.$$

Разделим обе части этого равенства на $\dfrac{Be^{\rho\, x_r}}{x_r - x_0}$ и обозначим $y_r = x_r - x_0$. Получим $1 - \frac{A}{B} e^{-\rho\, y_r} = \rho\, y_r$, или $(1 - \rho\, y_r)\, e^{\rho\, y_r} = \frac{A}{B}$, что можно записать в виде

$$e^{\rho\, y_r}\, \ln \frac{e}{e^{\rho\, y_r}} = \frac{A}{B} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Отсюда, учитывая соотношение $y_r = x_r - x_0 > 0$, заключаем, что $e^{\rho\, y_r} = a_2$, т. е. $y_r = x_r - x_0 = \frac{1}{\rho} \ln a_2$, где $a_2 \in (1, e)$. Окончательно, $x_r = x_0 + \frac{1}{\rho} \ln a_2$, что и требовалось доказать.

Продолжим оценку усредненной считающей функции $N_1(x)$, выбрав в качестве x_0 любую из точек x_k, фигурирующих в (29). Учитывая соотношение (29), можем утверждать, что график $N_1(x)$ на отрезке $[x_0,\, x_r]$ не пересекает правую касательную, ибо в противном случае он пересекал бы и график функции $y_{_B}(x) = Be^{\rho x}$, находясь согласно (28) ниже него. Записав уравнение рассматриваемой касательной в виде $y = Be^{\rho\, x_r} + \rho Be^{\rho\, x_r}(x - x_r)$, получим, что

$$N_1(x) \leqslant Be^{\rho\, x_r} + \rho Be^{\rho\, x_r}(x - x_r), \quad x \in [x_0,\, x_r].$$

Поскольку все сказанное выше справедливо и для касательной слева, то выполняется также и неравенство

$$N_1(x) \leqslant Be^{\rho\, x_l} + \rho Be^{\rho\, x_l}(x - x_l), \quad x \in [x_l,\, x_0].$$

Обозначим $y_0 = e^{x_0}$, $y_l = e^{x_l}$, $y_r = e^{x_r}$. В силу леммы имеем $y_l = y_0 a_1^{1/\rho}$, $y_r = y_0 a_2^{1/\rho}$. Возвращаясь к исходной считающей функции $N(y) = N_1(\ln y)$, запишем полученные для функции $N_1(x)$ неравенства в виде

$$N(y) \leqslant \begin{cases} By_l^\rho \left(1+\rho(\ln y - \ln y_l)\right) = By_0^\rho a_1 \left(1+\rho\ln\dfrac{y}{y_0 a_1^{1/\rho}}\right), & y\in[y_0a_1^{1/\rho},\, y_0],\\ By_0^\rho a_2\left(1+\rho\ln\dfrac{y}{y_0a_2^{1/\rho}}\right), & y\in[y_0,\, y_0a_2^{1/\rho}],\\ By^\rho, & y\notin[y_0a_1^{1/\rho},\, y_0a_2^{1/\rho}], \qquad y>c. \end{cases}$$

Напомним, что здесь $a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2$ – суть корни уравнения (13), и что в качестве x_0 мы выбрали произвольную точку x_k из (29). Зафиксируем теперь числа $b>0$, $k\in\mathbb{N}$ и положим в предыдущих неравенствах $y = r_k\tau$, $r_k = by_0 = be^{x_k}$. Тогда

$$N(r_k\tau) \leqslant \begin{cases} B\left(\dfrac{r_k}{b}\right)^\rho a_1\left(1+\ln\dfrac{(b\tau)^\rho}{a_1}\right), & \tau\in\left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b},\, \frac{1}{b}\right],\\ B\left(\dfrac{r_k}{b}\right)^\rho a_2\left(1+\ln\dfrac{(b\tau)^\rho}{a_2}\right), & \tau\in\left[\frac{1}{b},\, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right],\\ B(r_k\tau)^\rho, & \tau\notin\left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b},\, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right],\ \tau>\frac{c}{r_k}. \end{cases} \tag{31}$$

Учитывая, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13), преобразуем выражение

$$a_i\left(1+\ln\frac{(b\tau)^\rho}{a_i}\right) = a_i\ln\frac{e}{a_i} + a_i\ln(b\tau)^\rho = \frac{A}{B} + a_i\ln(b\tau)^\rho, \qquad i=1,2.$$

Теперь для функции $\varphi_r(\tau) = \dfrac{N(r\tau)}{(r\tau)^\rho}$ из формулы (23) получаем при $\tau > \frac{c}{r_k}$ оценку

$$\varphi_{r_k}(\tau) \leqslant \psi(\tau) = \begin{cases} B(\tau b)^{-\rho}\left(\frac{A}{B} + a_1\ln(b\tau)^\rho\right), & \tau\in\left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b},\, \frac{1}{b}\right],\\ B(\tau b)^{-\rho}\left(\frac{A}{B} + a_2\ln(b\tau)^\rho\right), & \tau\in\left[\frac{1}{b},\, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right],\\ B, & \tau\notin\left[\frac{a_1^{1/\rho}}{b},\, \frac{a_2^{1/\rho}}{b}\right]. \end{cases} \tag{32}$$

Опираясь на первую часть теоремы, считаем, что все нули функции положительны, и вновь используем представление (23), но не для всех $r>0$, а только для значений $r = r_k$, $k=1,2,\dots$ (см. (31)). В результате получим

$$\sigma(r_k) = r_k^{-\rho}\ln\max_{|z|=r_k}|f(z)| = \int_0^{+\infty}\varphi_{r_k}(\tau)\frac{t^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau = \int_0^{+\infty}\psi(\tau)\frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau +$$

$$+\int_0^{\frac{c}{r_k}}\left(\varphi_{r_k}(\tau)-\psi(\tau)\right)\frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau + \int_{\frac{c}{r_k}}^{+\infty}\left(\varphi_{r_k}(\tau)-\psi(\tau)\right)\frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty}(\psi(\tau)-B)\frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau + B\int_0^{+\infty}\frac{\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau + O(1)\,\frac{c}{r_k} =$$

$$
= B\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} + B\int\limits_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} \frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}+a_1\ln(b\tau)^\rho\right)-\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau +
$$

$$
+B\int\limits_{b^{-1}}^{b^{-1}a_2^{1/\rho}} \frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}+a_2\ln(b\tau)^\rho\right)-\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\,d\tau + o(1) =: B\left(\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} + I_1 + I_2\right) + o(1).
$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$
\sigma(r_k) \leqslant B\left(\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} + I_1 + I_2\right) + o(1), \qquad k\to\infty. \tag{33}
$$

Упростим интегралы I_1 и I_2, интегрируя по частям. Для I_1 имеем

$$
I_1 = \left.\frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}+a_1\ln(b\tau)^\rho\right)-\tau^\rho}{(1+\tau)^2}\right|_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} + \rho\int\limits_{b^{-1}a_1^{1/\rho}}^{b^{-1}} \frac{a_1b^{-\rho}-\tau^\rho}{\tau(\tau+1)}\,d\tau.
$$

В интеграле сделаем замену переменной $\tau = t^{-1}$, а вычисление подстановки приводит к выражению

$$
-\frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}-1\right)}{b^{-1}+1} + \frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}+a_1\ln a_1 - a_1\right)}{b^{-1}+1} = -\frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}-1\right)}{b^{-1}+1}.
$$

В итоге получим

$$
I_1 = -\frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}-1\right)}{b^{-1}+1} + \rho\int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{a_1b^{-\rho}-t^{-\rho}}{t+1}\,dt. \tag{34}
$$

Аналогичные вычисления интеграла I_2 дают

$$
I_2 = \frac{b^{-\rho}\left(\frac{A}{B}-1\right)}{b^{-1}+1} + \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{a_2b^{-\rho}-t^{-\rho}}{t+1}\,dt. \tag{35}
$$

Учитывая (33)–(35), при $k\to\infty$ можем записать

$$
\sigma(r_k) \leqslant B\rho\left(\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} + \int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{a_1b^{-\rho}-t^{-\rho}}{t+1}\,dt + \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{a_2b^{-\rho}-t^{-\rho}}{t+1}\,dt\right) + o(1).
$$

Изменяя знаки в подынтегральных выражениях и переходя к нижнему пределу по $k\to\infty$, получаем

$$
\underline{\sigma}_\rho(f) \leqslant B\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \left\{\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{t^{-\rho}-a_2b^{-\rho}}{t+1}\,dt + \int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{t^{-\rho}-a_1b^{-\rho}}{t+1}\,dt\right\}\right).
$$

Оценка справедлива при любых $\varepsilon>0$ и $b>0$. Устремив ε к нулю, а затем взяв супремум по $b>0$, получим окончательно

$$
\underline{\sigma}_\rho(f) \leqslant \beta^*\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \sup_{b>0}\left\{\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{t^{-\rho}-a_2b^{-\rho}}{t+1}\,dt + \int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{t^{-\rho}-a_1b^{-\rho}}{t+1}\,dt\right\}\right).
$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, требуется для наперед заданных чисел $\rho \in (0,1)$, $\beta^* > 0$ и $\alpha^* \in [0,\beta^*]$ предъявить целую функцию $\tilde f(z)$, которая доставляет равенство в полученной оценке нижнего типа и имеет положительные нули $\Lambda_f = \tilde\Lambda$ усредненных ρ-плотностей $\underline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda) = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^*_\rho(\tilde\Lambda) \leqslant \beta^*$. Построим усредненную считающую функцию $N_{\tilde\Lambda}(r) =: N(r)$ такой экстремальной последовательности нулей. Расположим члены искомой последовательности в порядке возрастания:

$$\widetilde\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty\,, \quad 0 < \lambda_1 = ... = \lambda_{n_1} < \lambda_{n_1+1} = ... = \lambda_{n_2} < \lambda_{n_2+1} = \dots\,. \tag{36}$$

Для $r \in \big[\lambda_{n_k},\, \lambda_{n_{k+1}}\big)$ считающая функция $n_{\tilde\Lambda}(r) = n(r) = n_k$, а усредненная считающая функция $N(r)$ имеет вид

$$N(r) = N(\lambda_{n_k}) + n_k \ln\frac{r}{\lambda_{n_k}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Нам вновь удобней перейти к экспоненциальному переменному в качестве аргумента. Рассмотрим функции

$$\omega(x) := n(e^x), \qquad \Omega(x) := N(e^x).$$

График функции $\Omega(x) = \int\limits_0^x \omega(t)\,dt$ представляет собой ломаную, каждое звено которой имеет линейное уравнение с натуральным угловым коэффициентом:

$$\Omega(x) = \Omega(\ln\lambda_{n_k}) + n_k(x - \ln\lambda_{n_k}), \qquad x \in [\ln\lambda_{n_k},\, \ln\lambda_{n_{k+1}}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Далее, в отличие от предыдущего, обозначим $A = \alpha^*$, $B = \beta^*$ и рассмотрим функцию $y_{_B}(x) = B\,e^{\rho\,x}$, $x > 0$. Проведем к графику $G_{_B}$ этой функции касательные l_j с угловыми коэффициентами, равными последовательным натуральным числам $j \in \mathbb{N}$. Абсциссы x_j точек касания нетрудно вычисляются:

$$x_j = \frac{1}{\rho}\ln\frac{j}{\rho B},\ j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $y = \Omega_1(x)$ — уравнение ломаной, j-е звено которой является отрезком касательной l_j, содержащим точку касания $(x_j,\, Be^{\rho\,x_j})$. В силу выпуклости функции $y_{_B}(x)$ график этой ломаной расположен ниже графика $G_{_B}$. Кроме того, по лемме из книги [11, с. 126] на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, $j \to \infty$, выполняется соотношение

$$0 \leqslant y_{_B}(x) - \Omega_1(x) \leqslant \frac{1}{4}(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{4\rho}\ln\frac{j+1}{j} < \frac{1}{4\rho\, j} = O\left(e^{-\rho x}\right). \tag{37}$$

Таким образом,

$$0 \leqslant y_{_B}(x) - \Omega_1(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Omega_1(x)}{e^{\rho x}} = B. \tag{38}$$

Модифицируем ломаную $y = \Omega_1(x)$. Для этого выберем какую-либо строго возрастающую последовательность натуральных чисел m_n, удовлетворяющую условию

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} \nearrow +\infty, \qquad n \to \infty. \tag{39}$$

Для каждого $j = m_n$, $n \in \mathbb{N}$, мы продлим звено l_j ломаной $y = \Omega_1(x)$ до встречи с графиком $G_{_A}$ функции $y_{_A}(x) = A\,e^{\rho\,x}$ в точке $\big(\xi_j, A\,e^{\rho\,\xi_j}\big)$. Затем из этой точки проведем вправо касательную l_j' к $G_{_B}$ в точке $\Big(\xi_j', B\,e^{\rho\,\xi_j'}\Big)$. Согласно лемме 1 абсциссы указанных точек даются формулами

$$\xi_j \,=\, x_j \,-\, \frac{1}{\rho}\ln a_1, \quad \xi_j' \,=\, \xi_j \,+\, \frac{1}{\rho}\ln a_2 \,=\, x_j \,+\, \frac{1}{\rho}\ln\frac{a_2}{a_1}, \quad j = m_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

в которых a_1, a_2 — корни уравнения (13).

Обозначим отрезки $\left[x_{m_n},\, x_{m_n}+\dfrac{1}{\rho}\ln\dfrac{a_2}{a_1}\right] =: I_n$, $n\in\mathbb{N}$. Если $\dfrac{a_2}{a_1}j\in\mathbb{N}$, то на каждом отрезке I_n считаем, что новая ломаная $y=\Omega(x)$ задается уравнениями описанных выше полукасательных ($j=m_n$):

$$\Omega(x)=Be^{\rho x_j}+\rho Be^{\rho x_j}(x-x_j)=Be^{\rho x_j}\left(1-\rho(x-x_j)\right), \qquad x\in[x_j,\,\xi_j], \tag{40}$$

$$\Omega(x)=Be^{\rho\xi_j'}+\rho Be^{\rho\xi_j'}(x-\xi_j')=Be^{\rho\xi_j'}\left(1-\rho(x-\xi_j')\right), \qquad x\in\left[\xi_j,\,\xi_j'\right]. \tag{41}$$

На множестве $\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n =: J$ оставляем ломаную $y=\Omega_1(x)$ без изменений, т. е. полагаем $\Omega(x)=\Omega_1(x)$, $x\in J$.

Если же $\dfrac{a_2}{a_1}j\notin\mathbb{N}$, то в этом случае правую касательную проводим с угловым коэффициентом $\left[\dfrac{a_2}{a_1}j\right]$ (квадратные скобки означают целую часть). Она пересечет левую касательную не в точке графика G_A, а в некоторой точке (обозначим ее $(\xi_j,\,\Omega(\xi_j))$), лежащей выше этого графика. Не очень сложные, но довольно кропотливые вычисления показывают, что выполняется условие

$$\frac{\Omega(\xi_j)}{e^{\rho\xi_j}}\to A, \qquad j=m_n\to\infty. \tag{42}$$

Кроме того, поскольку на множестве J мы положили $\Omega(x)=\Omega_1(x)$, то соотношение (38) выполняется для $x\in J$, т. е.

$$\lim_{J\ni x\to+\infty}\frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}}=B. \tag{43}$$

Из условий (42), (43) заключаем, что справедливы предельные соотношения

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}}=A, \qquad \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\Omega(x)}{e^{\rho x}}=B. \tag{44}$$

Формула $N(e^x)=\Omega(x)$ определяет усредненную считающую функцию последовательности $\widetilde{\Lambda}$ вида (36) следующим образом: абсциссы вершин построенной ломаной (точнее, их логарифмы) задают члены последовательности, каждый из которых входит в $\widetilde{\Lambda}$ с кратностью, равной разности угловых коэффициентов звеньев ломаной с общей вершиной. Докажем, что построенная последовательность является экстремальной. Действительно, условия (44) означают, что

$$\underline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda})=\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{r^\rho}=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\Omega(x)}{e^{\rho\,x}}=A,$$

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\widetilde{\Lambda})=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N(r)}{r^\rho}=\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\Omega(x)}{e^{\rho\,x}}=B.$$

Полагая в (40), (41), (37)

$$x=\ln t, \quad \zeta_n=e^{\xi_{m_n}}=\left(\frac{m_n}{\rho Ba_1}\right)^{1/\rho}, \quad t_n^{(i)}=\zeta_n a_i^{1/\rho}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

получим

$$N(t)=B\,\zeta_n^\rho\,a_1\left(1+\rho\,\ln\frac{t}{\zeta_n a_1^{1/\rho}}\right)=B\,\zeta_n^\rho\,a_1\,\ln\frac{e}{a_1}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, \quad t\in[t_n^{(1)},\,\zeta_n], \tag{45}$$

$$N(t)=B\,\zeta_n^\rho\,a_2\left(1+\rho\,\ln\frac{t}{\zeta_n a_2^{1/\rho}}\right)=B\,\zeta_n^\rho\,a_2\,\ln\frac{e}{a_2}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, \quad t\in[\zeta_n,\,t_n^{(2)}], \tag{46}$$

$$B\,t^\rho \geq N(t) \geq B\,t^\rho \,-\, O\left(t^{-\rho}\right), \quad t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [t_n^{(1)},\, t_n^{(2)}] \;=: T. \tag{47}$$

Для логарифма максимума модуля канонического произведения $\widetilde{f}(z)$, построенного по последовательности $\widetilde{\Lambda}$, опять воспользуемся представлением (23):

$$\sigma(r) \,=\, r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} \left| \widetilde{f}(z) \right| = \int\limits_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt, \tag{48}$$

где $\varphi_r(t) := \dfrac{N_{\widetilde{\Lambda}}(rt)}{(rt)^\rho}$. Согласно (45)–(47) имеем

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} Ba_1 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, & t \in \left[\frac{t_n^{(1)}}{r},\, \frac{\zeta_n}{r}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ Ba_2 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho, & t \in \left[\frac{\zeta_n}{r},\, \frac{t_n^{(2)}}{r}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ B \,-\, O\left((tr)^{-2\rho}\right), & t \notin T \,=\, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [t_n^{(1)},\, t_n^{(2)}]. \end{cases} \tag{49}$$

Интеграл в правой части (48) преобразуем следующим образом:

$$\sigma(r) \,=\, B \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,-\, \int\limits_0^{+\infty} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,=$$

$$= B\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} - \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus T} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt -$$

$$- \int\limits_T (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,=\, B\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} \,-\, (I_1(r) \,+\, I_2(r)).$$

Интеграл $I_1(r)$ при $r \to +\infty$ оценивается просто:

$$I_1(r) = O\left(r^{-2\rho}\right) \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus T} \frac{dt}{t^\rho (1+t)^2} \;\leqslant\; O\left(r^{-2\rho}\right) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\rho (1+t)^2} \,=\, O\left(r^{-2\rho}\right).$$

Вычисление интеграла $I_2(r)$ потребует значительно больших усилий. Используя первые две строки (49), имеем

$$I_2(r) = \int\limits_T (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} (B - \varphi_r(t)) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \left(B - Ba_1 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_1} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \left(B - Ba_2 \left(\frac{\zeta_n}{rt}\right)^\rho \ln \frac{e}{a_2} \left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho \right) \frac{t^\rho}{(1+t)^2}\, dt \,=\, B\,S(r),$$

т. е. $I_2(r) = B\,S(r)$, где обозначено $S(r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(r)$ и

$$S_n(r) = \int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln\frac{e}{a_1}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)^2}\,dt \;+\; \int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln\frac{e}{a_2}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)^2}\,dt.$$

Предварительным итогом преобразований интеграла в (48) является асимптотическое равенство

$$\sigma(r) \,=\, B\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) \,+\, o(1), \qquad r \to +\infty. \tag{50}$$

Наша ближайшая задача — оценить сумму в этой формуле. Интегрирование по частям каждого слагаемого дает:

$$S_n(r) = -\left.\frac{t^\rho - a_1\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln\frac{e}{a_1}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)}\right|_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \,+\, \rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt -$$

$$-\left.\frac{t^\rho - a_2\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho \ln\frac{e}{a_2}\left(\frac{tr}{\zeta_n}\right)^\rho}{(1+t)}\right|_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \,+\, \rho\int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt +$$

$$+\,\rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt \,+\, \rho\int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt.$$

При вычислении подстановок мы учли, что a_1, a_2 — корни уравнения (13). Таким образом,

$$S_n(r) = \rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^\rho - a_1\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt \,+\, \rho\int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho - a_2\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^\rho}{t(t+1)}\,dt. \tag{51}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и оценим $S_n(r)$ для $r \in [\zeta_j,\, \zeta_{j+1}]$. Пренебрегая отрицательными слагаемыми, получаем две оценки

$$S_n(r) \,\leqslant\, \rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho\,dt}{t(t+1)} \,\leqslant\, \rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} t^{\rho-1}\,dt \,=$$

$$= \left(\frac{t_n^{(2)}}{r}\right)^\rho - \left(\frac{t_n^{(1)}}{r}\right)^\rho \,\leqslant\, \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_j}\right)^\rho (a_2 - a_1), \tag{52}$$

$$S_n(r) \leqslant \rho\int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^\rho\,dt}{t(t+1)} \leqslant \rho\int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{t_n^{(2)}/r} t^{\rho-2}\,dt \,=\, \frac{\rho}{\rho-1}\left(\left(\frac{t_n^{(2)}}{r}\right)^{\rho-1} - \left(\frac{t_n^{(1)}}{r}\right)^{\rho-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant\, \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_n}\right)^{1-\rho}(a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}). \tag{53}$$

Из условия (39) следует, что

$$\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_j} = \left(\frac{m_{j+1}}{m_j}\right)^{1/\rho} \to \infty, \quad j \to \infty. \tag{54}$$

Отсюда нетрудно вывести (см. [16, § 3]), что выполняются равенства

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{j-1} \zeta_n^{\rho}}{\zeta_j^{\rho}} = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{\sum\limits_{n=j+2}^{\infty} \zeta_n^{\rho-1}}{\zeta_{j+1}^{\rho-1}} = 0.$$

Теперь, с помощью (52) и (53) получаем, что равномерно по $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ выполняются соотношения

$$\sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) \leqslant (a_2 - a_1) \sum_{n=1}^{j-1} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_j}\right)^{\rho} = (a_2 - a_1) \frac{\sum\limits_{n=1}^{j-1} \zeta_n^{\rho}}{\zeta_j^{\rho}} \longrightarrow 0, \quad j \to \infty, \tag{55}$$

$$\sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) \leqslant \frac{\rho}{1-\rho} \left(a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}\right) \sum_{n=j+2}^{\infty} \left(\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_n}\right)^{1-\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho}{1-\rho} \left(a_1^{1-1/\rho} - a_2^{1-1/\rho}\right) \frac{\sum\limits_{n=j+2}^{\infty} \zeta_n^{\rho-1}}{\zeta_{j+1}^{\rho-1}} \longrightarrow 0, \quad j \to \infty. \tag{56}$$

Таким образом, мы установили, что для достаточно больших j главными слагаемыми в сумме

$$S(r) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(r) = \sum_{n=1}^{j-1} S_n(r) + \sum_{n=j+2}^{\infty} S_n(r) + [S_j(r) + S_{j+1}(r)]$$

служат слагаемые с индексами j и $j+1$. Точнее, равномерно по $r \in [\zeta_j,\, \zeta_{j+1}]$ справедливо равенство

$$S(r) = o(1) + [S_{j+1}(r) + S_{j+2}(r)], \qquad j \to \infty. \tag{57}$$

Преобразуем сумму в квадратных скобках. Для этого в формуле (51), выражающей $S_n(r)$, сделаем замену переменной $t = 1/\tau$:

$$S_n(r) = \rho \int\limits_{t_n^{(1)}/r}^{\zeta_n/r} \frac{t^{\rho} - a_1 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^{\rho}}{t(t+1)}\, dt \;+\; \rho \int\limits_{\zeta_n/r}^{t_n^{(2)}/r} \frac{t^{\rho} - a_2 \left(\frac{\zeta_n}{r}\right)^{\rho}}{t(t+1)}\, dt \;=$$

$$= \rho \int\limits_{r/\zeta_n}^{a_1^{-1/\rho} r/\zeta_n} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 \left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \;+\; \rho \int\limits_{a_2^{-1/\rho} r/\zeta_n}^{r/\zeta_n} \frac{\tau^{-\rho} - a_2 \left(\frac{r}{\zeta_n}\right)^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau.$$

Запишем полученное равенство в виде

$$S_n(r) = \rho\, \Phi\left(\frac{r}{\zeta_n}\right), \tag{58}$$

где функция

$$\Phi(b) = \int\limits_{b}^{b a_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau + \int\limits_{b a_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{\tau^{-\rho} - a_2 b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau, \qquad b > 0,$$

та же, что и в формуле (26). Представим ее в виде

$$\Phi(b) = \Phi_1(b) - \Phi_2(b), \quad \text{где} \quad \Phi_k(b) = \int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_k b^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau, \qquad k = 1, 2.$$

Нам потребуются некоторые свойства функции $\Phi(b)$. Покажем сначала, что

$$\Phi(0+) = \Phi(+\infty) = 0. \tag{59}$$

Достаточно проверить, что каждая функция $\Phi_k(b)$, $k = 1, 2$, удовлетворяет этим условиям. Интегрирование по частям дает выражение

$$\Phi_k(b) = (a_k - 1)\frac{\ln(b+1)}{b^\rho} + \rho \int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Убедимся, что каждое слагаемое здесь удовлетворяет (59). Действительно, величина $\dfrac{\ln(b+1)}{b^\rho}$ стремится к нулю как при $b \to 0+$, так и при $b \to +\infty$. Далее,

$$\int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau \sim \int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \tau^{-\rho}\,d\tau = O\left(b^{1-\rho}\right) \longrightarrow 0, \qquad b \to 0+,$$

$$\int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln(\tau+1)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau \sim \int\limits_b^{ba_k^{-1/\rho}} \frac{\ln\tau}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau \leqslant \frac{1}{2b^\rho}\left(\ln^2 ba_k^{-1/\rho} - \ln^2 b\right) \to 0, \ b \to +\infty.$$

Таким образом, (59) выполнено. Поскольку $\Phi(b)$ допускает положительные значения при некоторых $b > 0$ (чтобы не прерывать нить доказательства, мы этот факт проверим в начале следующего параграфа), то можно утверждать, что непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $\Phi(b)$ достигает своего максимума в некоторой точке b_0, т. е.

$$\max_{b>0} \Phi(b) = \Phi(b_0) > 0. \tag{60}$$

Из (57), (58) следует равномерное по $r \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ соотношение

$$S(r) = S_j(r) + S_{j+1}(r) + o(1) = \rho\left[\Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) + \Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right)\right] + o(1), \ j \to \infty. \tag{61}$$

Оценим $S(r)$ сверху. Пусть сначала $r \in [\zeta_j, \sqrt{\zeta_j\zeta_{j+1}}]$. Тогда согласно (60) имеем $\Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) \leqslant \Phi(b_0)$, $j \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$0 < \frac{\zeta_j}{\zeta_{j+1}} \leqslant \frac{r}{\zeta_{j+1}} \leqslant \sqrt{\frac{\zeta_j}{\zeta_{j+1}}} \longrightarrow 0, \qquad j \to \infty,$$

то благодаря (59) находим, что

$$\max_{\zeta_j \leqslant r \leqslant \sqrt{\zeta_j\zeta_{j+1}}} \Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right) \longrightarrow 0, \qquad j \to \infty.$$

Пусть теперь $r \in [\sqrt{\zeta_j\zeta_{j+1}}, \ \zeta_{j+1}]$. Тогда $\Phi\left(\frac{r}{\zeta_{j+1}}\right) \leqslant \Phi(b_0)$. Так как

$$\frac{r}{\zeta_j} \geq \sqrt{\frac{\zeta_{j+1}}{\zeta_j}} \longrightarrow \infty, \qquad j \to \infty,$$

то снова в силу (59) имеем

$$\max_{\sqrt{\zeta_j\zeta_{j+1}}\leqslant r\leqslant\zeta_{j+1}} \Phi\left(\frac{r}{\zeta_j}\right) \longrightarrow 0, \qquad j\to\infty.$$

В обоих случаях получаем

$$S(r) \leqslant \rho\,\Phi(b_0)+o(1), \qquad r\to+\infty. \tag{62}$$

Более того, если $b_0\geq 1$, то, полагая в (61) $r=p_j=b_0\,\zeta_j$, получаем с учетом условий (59), что

$$S(p_j)=\rho\left[\Phi\left(b_0\right)+\Phi\left(\frac{b_0\zeta_j}{\zeta_{j+1}}\right)\right]+o(1)=\rho\,\Phi\left(b_0\right)+o(1), \qquad j\to\infty.$$

Если же $b_0\leqslant 1$, то, полагая в (61) $r=p_j=b_0\zeta_{j+1}$, опять в силу (59) получаем

$$S(p_j)=\rho\left[\Phi\left(\frac{b_0\zeta_{j+1}}{\zeta_j}\right)+\Phi\left(b_0\right)\right]+o(1)=\rho\,\Phi\left(b_0\right)+o(1), \qquad j\to\infty.$$

В обоих случаях выполняется

$$S(p_j)=\rho\,\Phi\left(b_0\right)+o(1), \qquad j\to\infty. \tag{63}$$

Из (62), (63) следует, что

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\,S(r)=\rho\,\Phi(b_0).$$

Это, в свою очередь, с учетом (50) влечет

$$\underline{\lim_{r\to+\infty}}\,\sigma(r)=B\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}-\overline{\lim_{r\to+\infty}}\,S(r)=B\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\Phi(b_0)\right).$$

Подводя итог, заключаем, что для функции $\widetilde{f}(z)$ с построенным нулевым множеством $\widetilde{\Lambda}$ согласно (48), (50), (57), (62), (63) выполняются равенства

$$\underline{\sigma}(\widetilde{f})=\underline{\lim_{r\to+\infty}}\,\sigma(r)=B\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho}-\Phi(b_0)\right).$$

Все случаи рассмотрены. Функция $\widetilde{f}(z)$ является экстремальной, так как доставляет равенство в (26). Для завершения доказательства укажем, что вторая форма записи функции $\Phi(b)$ получается из первой интегрированием по частям:

$$\Phi(b)=\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b}\frac{\tau^{-\rho}-a_2b^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau+\int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}}\frac{\tau^{-\rho}-a_1b^{-\rho}}{\tau+1}\,d\tau=$$

$$=\ln(1+\tau)\left(\tau^{-\rho}-a_2b^{-\rho}\right)\Big|_{ba_2^{-1/\rho}}^{b}+\rho\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau+$$

$$+\ln(1+\tau)\left(\tau^{-\rho}-a_1b^{-\rho}\right)\Big|_{b}^{ba_1^{-1/\rho}}+\rho\int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau=$$

$$=\rho\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau^{\rho+1}}\,d\tau+\ln(1+b)(1-a_2)b^{-\rho}+\ln(1+b)(a_1-1)b^{-\rho}=$$

$$= \rho \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\ln(1+\tau)}{\tau^{\rho+1}}\, d\tau \, - \ln(1+b)(a_2-a_1)b^{-\rho} = \rho \int\limits_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \frac{\ln(\tau+1)-\ln(b+1)}{\tau^{\rho+1}}\, d\tau.$$

Теорема 3 доказана.

4. Двусторонние оценки экстремальной величины $\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho)$

Докажем сначала анонсированное в доказательстве теоремы 3 соотношение (60) в случае $\alpha^* < \beta^*$. Для этого оценим функцию $\Phi(b)$ при достаточно больших значениях аргумента, учитывая, что корни уравнения (13) связаны строгими неравенствами $a_1 < 1 < a_2$. Запишем $\Phi(b)$ в виде

$$\Phi(b) = \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{b} \frac{\tau^{-\rho}-a_2b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \, + \int\limits_{b}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}-a_1b^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \, =$$

$$= \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \, - \, a_2b^{-\rho}\ln\frac{b+1}{1+ba_2^{-1/\rho}} \, - \, a_1b^{-\rho}\ln\frac{1+ba_1^{-1/\rho}}{1+b}.$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \, > \int\limits_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} \tau^{-\rho-1}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\, d\tau = \frac{\tau^{-\rho}}{-\rho}\Bigg|_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} + \frac{\tau^{-\rho-1}}{\rho+1}\Bigg|_{ba_2^{-1/\rho}}^{ba_1^{-1/\rho}} =$$

$$= \frac{b^{-\rho}}{\rho}\,(a_2-a_1) - \frac{b^{-\rho-1}}{\rho+1}\left(a_2^{1+1/\rho}-a_1^{1+1/\rho}\right).$$

Применяя неравенства $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, оценим оставшиеся слагаемые:

$$a_2b^{-\rho}\ln\frac{1+b}{1+ba_2^{-1/\rho}} = a_2b^{-\rho}\ln\frac{b\,(1+1/b)}{ba_2^{-1/\rho}\left(1+1/ba_2^{-1/\rho}\right)} <$$

$$< \, a_2b^{-\rho}\left[\ln a_2^{1/\rho} + \left(\frac{1}{b}-\frac{a_2^{1/\rho}}{b}+\frac{1}{2}\frac{a_2^{2/\rho}}{b^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{a_2b^{-\rho}}{\rho}\ln a_2 + a_2b^{-\rho-1}\left[\left(1-a_2^{1/\rho}\right)+\frac{a_2^{2/\rho}}{2b}\right]$$

и, аналогично,

$$a_1b^{-\rho}\ln\frac{1+ba_1^{-1/\rho}}{1+b} \, < \, -\frac{a_1b^{-\rho}}{\rho}\ln a_1 + a_1b^{-\rho-1}\left(a_1^{1/\rho}-1+\frac{1}{2b}\right).$$

Собирая полученные оценки, можем записать

$$\Phi(b) > \frac{b^{-\rho}}{\rho}\,(a_2-a_1-a_2\ln a_2+a_1\ln a_1)+$$

$$+b^{-\rho-1}\left[-\frac{\left(a_2^{1+1/\rho}-a_1^{1+1/\rho}\right)}{\rho+1}-\left(a_2-a_2^{1+1/\rho}+\frac{a_2^{1+2/\rho}}{2b}\right)-\left(a_1^{1+1/\rho}-a_1+\frac{a_1}{2b}\right)\right].$$

Первое слагаемое исчезает, поскольку выражение в скобках равно

$$a_2 \ln \frac{e}{a_2} - a_1 \ln \frac{e}{a_1} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} - \frac{\alpha^*}{\beta^*} = 0$$

в силу того, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13). Таким образом, имеем

$$\Phi(b) > b^{-\rho-1} \left[\left(a_2^{1+1/\rho} - a_1^{1+1/\rho} \right) \frac{\rho}{\rho+1} - (a_2 - a_1) - \frac{1}{2b} \left(a_1 + a_2^{1+2/\rho} \right) \right],$$

или, обозначив $1 + 1/\rho = \nu \quad (\nu > 2)$,

$$\Phi(b) > \frac{b^{-\rho-1}}{\nu} \left[a_2^\nu - a_1^\nu - \nu(a_2 - a_1) - O\left(\frac{1}{b}\right) \right], \quad b \to +\infty.$$

Докажем, что $\psi(\nu) = a_2^\nu - a_1^\nu - \nu(a_2 - a_1) > 0$ для всех $\nu \geq 1$. Имеем

$$\psi'(\nu) = a_2^\nu \ln a_2 - a_1^\nu \ln a_1 - (a_2 - a_1), \qquad \psi''(\nu) = a_2^\nu \ln^2 a_2 - a_1^\nu \ln^2 a_1.$$

Функция $\psi''(\nu)$ является возрастающей, так как в ее задании первое слагаемое возрастает с ростом ν, а второе убывает. Тогда для $\nu \geq 1$ выполняется

$$\psi''(\nu) \geq \psi''(1) = a_2 \ln^2 a_2 - a_1 \ln^2 a_1 = a_2(\ln^2 a_2 - 1) + a_2 - a_1(\ln^2 a_1 - 1) - a_1 =$$

$$= (a_2 \ln a_2 - a_2)(\ln a_2 + 1) - (a_1 \ln a_1 - a_1)(\ln a_1 + 1) + a_2 - a_1 = -\frac{\alpha^*}{\beta^*} \ln \frac{a_2}{a_1} + a_2 - a_1.$$

Здесь мы опять воспользовались тем, что a_1 и a_2 являются корнями уравнения (13). Применим теперь параметрическое представление корней этого уравнения, найденное в работе [31]:

$$a_1 \;=\; e\, s^{\frac{s}{1-s}}, \quad a_2 \;=\; s\, a_1 \;=\; s^{\frac{1}{1-s}}, \qquad s > 1.$$

Тогда получим

$$\psi''(1) = a_2 - a_1 - a_1 \,\ln \frac{e}{a_1} \ln \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{s-1} \left[(s-1)^2 - s \ln^2 s \right] > 0.$$

Положительность выражения в квадратных скобках вытекает из его монотонного возрастания, которое нетрудно получить обычными методами анализа. Из доказанной положительности $\psi''(\nu)$ на $[1, +\infty)$ вытекает возрастание $\psi'(\nu)$ на этом промежутке. Следовательно,

$$\psi'(\nu) \;>\; \psi'(1) \;=\; a_2 \ln a_2 - a_1 \ln a_1 - (a_2 - a_1) \;=\; 0, \qquad \nu > 1.$$

Отсюда, в свою очередь, следует возрастание самой функции $\psi(\nu)$, что дает для $\nu > 1$ неравенство

$$\psi(\nu) \;>\; \psi(1) \;=\; a_2 - a_1 - a_2 + a_1 \;=\; 0.$$

Тем самым, справедливость соотношения (60) доказана.

Приступим теперь к изучению величины $\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho)$ и получим сначала простые оценки интеграла, входящего в определение функции $\Phi(b)$. Поскольку на отрезке интегрирования $\tau \geq b,$ то выполняется неравенство $-\, b^{-\rho} \leqslant -\, \tau^{-\rho}$, и, оценивая $\Phi(b)$, можем записать

$$\Phi(b) \;\leqslant\; \Phi_1(b) \;=\; \int\limits_b^{b a_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1 b^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau \;\leqslant\; \int\limits_b^{b a_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}(1 - a_1)}{\tau + 1}\, d\tau.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\Phi(b) \;\leqslant\; (1 - a_1) \int\limits_b^{b a_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1}\, d\tau. \tag{64}$$

Расширение промежутка интегрирования приводит к неравенству

$$\Phi(b) \leqslant (1-a_1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau = (1-a_1)\,\frac{\pi}{\sin\pi\,\rho}, \qquad b>0.$$

Отсюда следует

$$\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) = \beta^*\,\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,\rho} - \sup_{b>0}\Phi(b)\right) \geq$$

$$\geq \beta^*\,\rho\left(\frac{\pi}{\sin\pi\,\rho} - (1-a_1)\,\frac{\pi}{\sin\pi\,\rho}\right) = a_1\,\frac{\pi\,\rho\,\beta^*}{\sin\pi\,\rho}.$$

Привлекая также (60), в итоге получаем двустороннюю оценку

$$a_1\,\frac{\pi\,\rho\,\beta^*}{\sin\pi\,\rho} \leqslant \underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) \leqslant \frac{\pi\,\rho\,\beta^*}{\sin\pi\,\rho}. \tag{65}$$

Эта простая оценка характеризует $\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho)$, когда меньший корень a_1 уравнения (13) равен или близок к единице, т. е. когда β^* совпадает или мало отличается от α^*. Но она совершенно не информативна при малых значениях корня a_1, когда β^* сильно превосходит α^*. Следующий результат устраняет этот недостаток.

Теорема 4. *Для любых $\rho \in (0,1)$, $\alpha^* > 0$, $\beta^* \geq \alpha^*$ справедливы неравенства*

$$\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) \geq \beta^*\rho\left[\frac{\pi a_1}{\sin\pi\rho} + a_1^{1-\rho}(1-a_1)A_\rho\right], \tag{66}$$

$$\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) \leqslant \beta^*\rho\left[\frac{\pi a_1}{\sin\pi\rho} + a_1^{1-\rho}(1-a_1)\left(B_\rho \ln\frac{e}{a_1} + e\right)\right], \tag{67}$$

где $A_\rho = \min\{1/2;\, \rho\}$, а $B_\rho = (\rho(1-\rho))^{-1}$.

Доказательство теоремы 4. Уточним (65), оценивая величину

$$S := \frac{\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho)}{\beta^*\,\rho} - \frac{\pi\,a_1}{\sin\pi\,\rho}.$$

С помощью неравенства (64) получаем

$$S = (1-a_1)\,\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \max_{b>0}\ \Phi(b) \geq$$

$$\geq (1-a_1)\,\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - (1-a_1)\max_{b>0} \int\limits_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau =: (1-a_1)\min_{b>0}\ \eta(b).$$

Функция $\eta(b) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\rho} - \displaystyle\int\limits_b^{ba_1^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau$, как показано в теореме 4 работы [26], имеет оценку снизу (в наших обозначениях)

$$\eta(b) \geq A_\rho\, a_1^{1-\rho}, \qquad A_\rho = \min\{1/2; \rho\}.$$

Применение этой оценки приводит при всех $\rho \in (0,1)$ к неравенству

$$S \geq A_\rho\, a_1^{1-\rho}(1-a_1),$$

из которого немедленно следует (66).

Несколько больших усилий требует оценка величины S сверху. При получении такой оценки мы, как и в работе [26], заменяем максимальное значение функции $\Phi(b)$ на ее значение в точке $b = a_1$:

$$\max_{b>0}\, \Phi(b) \,\geq\, \Phi(a_1) \,=\, \Phi_1(a_1) \,-\, \Phi_2(a_1).$$

Оценим каждое слагаемое.

$$\Phi_1(a_1) \,=\, \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_1^{1-\rho}}{\tau+1} d\tau \,=$$

$$= (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1 \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,-\, a_1^{1-\rho} \ln \frac{1+a_1^{1-1/\rho}}{1+a_1} \,\geq$$

$$\geq\, (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,-\, a_1^{1-\rho}(1-a_1) \ln \frac{1+a_1^{1-1/\rho}}{1+a_1} \,\geq$$

$$\geq (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(1-a_1) \ln a_1^{1/\rho}.$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что $\dfrac{1+a_1^{1-1/\rho}}{1+a_1} \,\leqslant\, a_1^{-1/\rho}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\Phi_1(a_1) \,\geq (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(1-a_1) \ln a_1^{1/\rho}. \tag{68}$$

Далее,

$$\Phi_2(a_1) \,=\, \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a_2\, a_1^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,=$$

$$= (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1 \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,-\, a_2 a_1^{-\rho} \ln \frac{1+a_1 a_2^{-1/\rho}}{1+a_1} \,\leqslant$$

$$\leqslant\, (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1^{-\rho}(a_1 - a_2) \ln \frac{1+a_1 a_2^{-1/\rho}}{1+a_1} \,\leqslant$$

$$\leqslant\, (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(a_2 - a_1).$$

Мы использовали неравенство

$$\ln \frac{1+a_1}{1+a_1 a_2^{-1/\rho}} \leqslant \ln(1+a_1) \leqslant a_1.$$

Окончательно имеем оценку

$$\Phi_2(a_1) \leqslant (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(a_2-a_1). \tag{69}$$

Теперь, учитывая обе оценки (68) и (69), получаем

$$\Phi(a_1) \,=\, \Phi_1(a_1) \,-\, \Phi_2(a_1) \geq$$

$$\geq (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\ln a_1^{1/\rho} - (1-a_1) \int\limits_{a_1}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \,-\, a_1^{1-\rho}(a_2-a_1) =$$

$$= (1-a_1) \int\limits_{a_1 a_2^{-1/\rho}}^{a_1^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \,+\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\ln a_1^{1/\rho} -\, a_1^{1-\rho}(a_2-a_1).$$

Вернемся к оценке S:

$$S \,=\, (1-a_1)\frac{\pi}{\sin \pi\rho} - \max_{b>0}\, \Phi(b) \,\leqslant\, (1-a_1)\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \,-\, \Phi(a_1) \,=$$

$$=\, (1-a_1)\left[\,\int\limits_{0}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \,+ \int\limits_{a_1^{1-1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau\right] \,-\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\ln a_1^{1/\rho} \,+\, a_1^{1-\rho}(a_2-a_1).$$

Выражение в квадратных скобках не превосходит

$$\int\limits_{0}^{a_1 a_2^{-1/\rho}} \tau^{-\rho} d\tau \,+ \int\limits_{a_1^{1-1/\rho}}^{+\infty} \tau^{-\rho-1} d\tau \,=\, \frac{\left(a_1 a_2^{-1/\rho}\right)^{1-\rho}}{1-\rho} \,+\, \frac{\left(a_1^{1-1/\rho}\right)^{-\rho}}{\rho} \,=$$

$$=\, a_1^{1-\rho}\left(\frac{a_2^{1-1/\rho}}{1-\rho} \,+\, \frac{1}{\rho}\right) \,\leqslant\, \frac{a_1^{1-\rho}}{\rho(1-\rho)}.$$

Не очень трудно показать (геометрически почти очевидно), что для корней a_1, a_2 уравнения (13) $(0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant e)$ выполняется условие

$$a_2 - a_1 \leqslant e\,(1-a_1).$$

В итоге можем записать

$$S \,\leqslant\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\left(\frac{1}{\rho(1-\rho)} - \frac{1}{\rho}\ln a_1 \,+\, e\right) \,=$$

$$=\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\left(\frac{1-(1-\rho)\ln a_1}{\rho(1-\rho)} \,+\, e\right) \,\leqslant\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\left(\frac{\ln \frac{e}{a_1}}{\rho(1-\rho)} \,+\, e\right),$$

что равносильно (67). Все утверждения теоремы 4 доказаны.

Если нижняя усредненная ρ-плотность корней α^* целой функции равна нулю, то, как мы заметили при доказательстве теоремы 1, ее нижний ρ-тип не зависит от верхней усредненной ρ-плотности β^* корней и равен нулю. Следовательно, и $\underline{S}^*(0,\, \beta^*;\, \rho) =\, 0$ при любом конечном β^*. Ситуация резко меняется, если $\alpha^* \,>\, 0$. В этом случае невозможно оценить сверху нижний ρ-тип целой функции только через нижнюю усредненную ρ-плотность ее корней, как это утверждает следующий результат, являющийся непосредственным следствием теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* $\rho \in (0,1)$ *и* $\alpha^* > 0$. *Справедливо утверждение*

$$\sup_{\beta^* \geq \alpha^*} \underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) \,=\, +\infty.$$

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем $\alpha^* > 0$. Если $\beta^* \to +\infty$, то меньший корень a_1 уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

стремится к нулю, а больший корень a_2 стремится к e. При этом, согласно (66), имеем

$$\underline{S}^*(\alpha^*,\, \beta^*;\, \rho) \,\geq\, \beta^* \rho\, a_1^{1-\rho}(1-a_1)\, A_\rho \,=\, \frac{\alpha^* \rho\, a_1^{1-\rho}(1-a_1) A_\rho}{\alpha^*/\beta^*} \,=$$

$$= \alpha^* \rho\, A_\rho\, (1-a_1) \frac{a_1^{1-\rho}}{a_1 \ln \frac{e}{a_1}} \,=\, \alpha^* \rho\, A_\rho\, (1-a_1) \frac{1}{a_1^{\rho} \ln \frac{e}{a_1}} \to +\infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ, 1956.
2. A. Pfluger *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen.* I // Comm. Math. Helv. V. 11. 1938. P. 180–213.
3. A. Pfluger *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen.* II // Comm. Math. Helv. V. 12. 1939. P. 25–69.
4. Хабибуллин Б.Н. *Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции* // Матем. сб. Т. 200. № 2. 2009. С. 129–158.
5. R.P. Boas *Entire functions.* New-York: Acad. Press, 1954.
6. Попов А.Ю. *Развитие теоремы Валирона-Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней* ρ*-плотностью корней* // СМФН. Т. 49. 2013. С. 132–164.
7. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке* $\rho < 1$ *канонических произведений с положительными нулями заданной верхней* ρ*-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. № 1. 2005. С. 31–36.
8. R.M. Redheffer *On even entire functions with zeros having a density* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 77. 1954. P. 32–61.
9. Попов А.Ю. *О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. № 5. 1999. С. 48–52.
10. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка* $\rho \in (0,1)$ *с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
11. Брайчев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.* М.: Прометей, 2005.
12. Брайчев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка* $\rho \in (0,1)$ *с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // Матем. сб. Т. 203. № 7. 2012. С. 31–56.
13. Брайчев Г.Г. *Точные оценки типа целой функции порядка меньше единицы с нулями на луче заданных усредненных плотностей* // Докл. РАН. Т. 445. № 6. 2012. С. 615–617.
14. G.G. Braichev, V.B. Sherstyukov *On an extremal problem related to the completeness of a system of exponentials in the disk* // Asian-European Journal of Math. V. 1. № 1. 2008. P. 15–26.
15. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями* // Матем. заметки. Т. 91. №. 5. 2012. С. 674–690.
16. Брайчев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка* $\rho \in (0,1)$ *с корнями заданных усредненных плотностей, расположенных на лучах или в угле* // Матем. сб. (принята к печати). 2015.

17. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Связь типов целой функции конечного порядка с плотностями ее нулей* // Сб. трудов XIV Международной конф. «Математика. Экономика. Образование», Абрау-Дюрсо. 2006. С. 52–55.
18. Азарин В.С. *О регулярности роста функционалов на целых функциях* // Теория функций, функциональный анализ и их прил., Харьков. Вып. 16. 1972. С. 109–137.
19. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. (Комплексный анализ. Одна переменная-1). М.: ВИНИТИ. Т. 85. 1991. С. 5–185.
20. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций.* III // Матем. сб. Т. 65(107). № 3. 1964. С. 414–453.
21. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций.* IV // Матем. сб. Т. 66(108). № 3. 1965. С. 411–457.
22. Кондратюк А.А. *Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями* // Сиб. матем. журн. Т. 11. № 5. 1970. С. 1084–1092.
23. Азарин В.С. *Об экстремальных задачах на целых функциях* // Теория функций, функциональный анализ и их прил., Харьков. Вып. 18. 1973. С. 18–50.
24. Красичков И.Ф. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. матем. журн. Т. 6. № 4. 1965. С. 840–861.
25. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
26. Брайчев Г.Г., Шерстюкова О.В. *Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей* // Матем. заметки. Т. 90. № 2. 2011. С. 199–215.
27. Шерстюков В.Б. *Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле* // Тезисы докладов 17 международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов: Изд-во Саратовского ун-та. 2014. С. 309–310.
28. Брайчев Г.Г. *Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах* // Матем. заметки. Т. 97. № 4. 2015. С. 503–515.
29. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука, 1981.
30. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels *Regular variation (Encyclopedia of mathematics and its applications;27).* Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
31. Брайчев Г.Г. *Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями на луче* // Уфимск. матем. журн. Т. 4. № 1. 2012. С. 29–37.

Георгий Генрихович Брайчев
Московский педагогический государственный университет,
ул. М. Пироговская, 1,
199296, Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru