ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 4 (2015). С. 61-74.

УДК 517.518.6

# О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СПЕКТРА ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**Н.П. ГИРЯ, С.Ю. ФАВОРОВ**

**Аннотация.** В работе рассматриваются различные определения спектра почти периодических функций в конечномерном пространстве относительно различных метрик (равномерной, метрики Степанова, Вейля, Безиковича). Доказано, что в этих случаях классическое определение спектра эквивалентно некоторому аналогу определения спектра по Берлингу.

**Ключевые слова:** Почти периодическая функция, спектр, метрика Степанова, метрика Вейля, метрика Безиковича, спектр Берлинга.

**Mathematics Subject Classification:** 42A75, 30B50

## 1. Введение

Пусть $f$ ограниченная измеримая функция на вещественной оси $\mathbb{R}$. Ее спектром Берлинга называется множество таких $\lambda \in \mathbb{R}$, что $e^{i\lambda t}$ лежит в замыкании множества конечных сумм вида $\sum_j c_j f(t + x_j)$, при этом замыкание рассматривается в слабой топологии пространства $L^\infty(\mathbb{R})$ как сопряженного к $L^1(\mathbb{R})$([2]). Можно показать, что так определенный спектр Берлинга является замкнутым множеством, которое в случае $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ совпадает с носителем преобразования Фурье $\widehat{f}(\lambda)$ функции $f(t)$.

Если $f(t)$ почти периодическая (далее п.п.) функция на вещественной оси, то ее спектр определяется обычно равенством:

$$spf = \{\lambda \in \mathbb{R} : a(\lambda, f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)e^{-i\lambda t} \neq 0\}.$$

Этот спектр может быть любым счетным множеством и поэтому, вообще говоря, может не совпадать со спектром Берлинга функции $f$. Однако, как показано в [4], если спектр Берлинга функции $f$ ограничен и счетен или только счетен (если $f$ равномерно непрерывна), то $f$ является п.п. функцией.

В предлагаемой работе мы рассматриваем аналог спектра Берлинга, используя другие, более сильные топологии. Нами доказано, что такой спектр Берлинга для почти периодической функции $f$ совпадает с классическим определением спектра. При этом мы рассматриваем функции в пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 0$, почти периодические как в смысле Бора, так и в смысле Степанова, Вейля, Безиковича. Заметим, что свойства спектра подобных функций, его связь с аналитическим продолжением функций на пространство $\mathbb{C}^n$ изучались нами ранее в работах [3], [7], [8].

Сформулируем определения и теоремы из теории п. п. функций, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

N.P. Girya, S.Yu. Favorov, Various definitions of the spectrum of almost periodic functions.



*Поступила 25 августа 2015 г.*

Через $\Omega(x,a)$ будем обозначать брус, то есть декартово произведение отрезков

$$\Omega(x,a) := [x_1, x_1+a_1] \times ... \times [x_n, x_n+a_n],$$

где $x, a \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n),\ \ a = (a_1, ..., a_n)$.

Введем следующие определения расстояния между двумя функциями $f(x)$ и $g(x)$ такими, что $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

**Определение 1.** *Величину*

$$D_U[f(x), g(x)] = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|$$

*будем называть расстоянием в равномерной метрике.*

**Определение 2.** (см. [9]) Величину

$$D_{S_l^p}[f(x), g(x)] = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(x,lI)} |f(y) - g(y)|^p dy]^{\frac{1}{p}},$$

где $I = (1, ..., 1)$ — будем называть $S$-расстоянием порядка $p$ ($p \geq\ 1$), соответствующим длине $l$ ($l>0$). Так введенная метрика называется метрикой Степанова.

В случае, когда $l = 1$, вместо $D_{S_1^p}$ будем писать $D_{S^p}$. Отметим, что $S$-расстояния при различных $l$ эквивалентны (в случае одной переменной см. [9], в случае многих переменных доказательство проводится аналогично).

**Определение 3.** (см. [9]) Величина

$$D_{W^p}[f(x), g(x)] = \lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}[f(x), g(x)] = \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(x,\,lI)} |f(y) - g(y)|^p dy]^{\frac{1}{p}},$$

называется $W$-расстоянием порядка $p$, ($p \geq\ 1$). Так введенная метрика называется метрикой Вейля.

**Определение 4.** (см. [1]) Величину

$$D_{B^p}[f(x), g(x)] = \{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} |f(y) - g(y)|^p dy\}^{\frac{1}{p}} = \{\overline{M}\{|f - g|^p\}\}^{\frac{1}{p}}$$

($p \geq 1$) называется расстоянием Безиковича порядка $p$. Так введенная метрика называется метрикой Безиковича.

В определении (1) всегда предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и ограничены, в определениях (2)–(4) предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и суммируемы в $p$-й степени в каждом компакте.

Пусть $D[f(x), g(x)]$ — одна из вышеперечисленных метрик ( $D_U, D_{S_l^p}, D_{W^p}, D_{B^p}$).

**Определение 5.** (см. [1]) Функция $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется $D$-почти периодической функцией, если существует последовательность конечных экспоненциальных сумм $P_n(x) = \sum\limits_j c_j e^{i\langle\lambda_j,x\rangle}, c_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}^n$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} D[f(x), P_n(x)] = 0.$$

Отметим, что в метриках $D_U, D_{S_l^p}, D_{W^p}$ часто используют эквивалентное определение на языке почти периодов.

**Определение 6.** *Вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$ называется $(D,\varepsilon)$-почти периодом суммируемой с p-й степенью (в каждом компакте) функции $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, если выполняется неравенство:*

$$D[f(x+\tau), f(x)] < \varepsilon.$$

**Определение 7.** *Измеримая и суммируемая вместе со своей p-й степенью (в каждом компакте) функция $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется $D$-почти периодической ($D = D_{S^l_p}$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество $E(D,\varepsilon)$-почти периодов $f(x)$. При этом множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется относительно плотным, если существует такое $L < \infty$, что $E \cap \Omega[a, LI] \neq \emptyset$ для любого $a \in \mathbb{R}^n$.*

Для $W^p$- п.п. это определение нужно несколько изменить. При условиях выше $f$ будет $W^p$ -п.п. функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $l < \infty$ и относительно плотное множество $E(D_{S^l_p}, \varepsilon)$-почти периодов $f(x)$.

Для $U$- п.п. необходимо заменить требование измеримости и суммируемости на требование непрерывности функции $f(x)$.

Из определения п.п. функции немедленно следует:

**Теорема 1.** *$D$-п.п. функция $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $D$-ограничена и $D$-равномерно непрерывна.*

**Теорема 2.** (см. [9]) Для каждой $D$- п. п. функции многих переменных $f(x)$ существует среднее значение

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int\limits_{\Omega(0,\, TI)} f(x)dx,$$

при этом предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int\limits_{\Omega(a,\, TI)} f(x)dx = M\{f(x+a)\}$ существует равномерно по $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, и выполнено равенство

$$M\{f(x+a)\} = M\{f(x)\}.$$

(Равномерность отсутствует в случае $D = D_{B^p}$, хотя равенство имеет место).

В частности, $M\{f(x)\} = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\, 2TI)} f(x)dx.$

Каждой $D$-п.п. функции $f(x)$ многих переменных можно отнести ряд Фурье $f(x) \sim \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^n} a(\lambda, f)e^{i\langle\lambda,x\rangle}$, где $a(\lambda, f) = M\{f(x)e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\}$.

**Определение 8.** (см. [1] при $n = 1$, [5] при $n > 1$) Спектром функции $f(x)$ называется множество $spf = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : a(\lambda, f) \neq 0\}$.

**Теорема 3.** *Спектр $D$-п.п. функции $f(x)$ многих переменных не более, чем счетен.*

Доказательства теорем (1)–(3) для одномерного случая можно найти в [9], а случай многих переменных рассматривается аналогично.

**Определение 9.** *Спектром типа Берлинга п.п. функции будем называть $sp_B f = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : e^{i\langle\lambda,t\rangle} \in \overline{Lin\{f(x+t)\}}_{x\in\mathbb{R}^n}\}$.*

Заметим, что замыкание берется в той метрике $D$, в которой определяется почти периодичность.

В работе мы доказываем следующую теорему.

**Теорема 4.** *Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $D$-п.п. функция, интегрируемая по Риману на любом брусе. Тогда $spf = sp_B f$.*

Доказательство. Докажем включение $spf \subset sp_B f$.

1) Рассмотрим случай $D = D_{W^p}$.

Пусть $\lambda \in spf$, тогда $M\{f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\} = \alpha \neq 0$. Положим $f_1(t) = \frac{1}{\alpha}f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}$. Это означает, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx = 1,$$

причем равномерно по параметру $t \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует не зависящее от $t$ число $T_0 = T_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $T > T_0$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx - 1\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма, соответствующая интегралу, записанному выше, приближающая его в метрике Вейля равномерно по $t \in \mathbb{R}^n$. Так как $f_1(t)$ — $W^p$-п.-п. функция, то она $W^p$-равномерно непрерывна, то есть для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существуют $l_0 = l_0(\varepsilon)$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$ такие, что при $l > l_0$ и $|h| < \delta$, выполнено

$$D_{S_l^p}[f_1(t+h), f_1(t)] < \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^N$ – произвольное разбиение бруса $\Omega(0,TI)$, но такое, что $\mathrm{diam(B_k)} < \ \delta \ \ (\mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{N}})$, где $\delta$ взято из (2). Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu(B_k) = T^n$ (где $\mu$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$). Пусть $\{h_k\}_{k=1}^N$ — произвольный набор точек в $\mathbb{R}^n$ таких, что $h_k \in B_k, k = \overline{1,N}$. Тогда интегральная сумма, соответствующая данному разбиению, будет иметь вид:

$$\sigma(f_1) = \frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f_1(t+h_k)\mu(B_k).$$

Покажем, что
$D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx, \sigma(f_1)] < \ \varepsilon$, то есть, что

$$\lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx, \sigma(f_1)] < \varepsilon.$$

Другими словами, существует такое $l_0 > 0$, что для каждого $l > l_0$ и для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство:

$$\left(\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,lI)}\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+y+t)dx - \frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f_1(t+h_k+y)\mu(B_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{3}$$

или

$$\left(\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,lI)}\left|\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}(f_1(x+t+y) - f_1(t+h_k+y))dx\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{4}$$

Применив неравенство Гельдера к выражению
$\left|\frac{1}{T^n}\sum\limits_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}(f_1(x+t+y)-f_1(t+h_k+y))dx\right|^p$, получим, что оно не превосходит

$$\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}|f_1(x+t+y)-f_1(t+h_k+y)|^p\,dx.$$

Для выполнения (4) достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,lI)}\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}|f_1(x+t+y)-f_1(t+h_k+y)|^p\,dxdt<\varepsilon^p. \tag{5}$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,lI)}|f_1(x+t+y)-f_1(t+h_k+y)|^p\,dtdx. \tag{6}$$

Заметим, что выполнено следующее неравенство:

$$\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,lI)}|f_1(t+x+y)-f_1(t+h_k+y)|^p dtdx\le$$

$$\le\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}D^p_{S^p_l}[f_1(t+x),f_1(t+h_k)]dx \tag{7}$$

Применим неравенство (2). Поскольку $\mu(B_k)<\delta$, $k=\overline{1,N}$, то $\forall x\in B_k$ выполнено $|(x+t)-(t+h_k)|<\delta$. Значит, существует $l_0>0$, такое что для всех $l>l_0$, для каждого $k=\overline{1,N}$ и каждого $x\in B_k$ выполнено:

$$D_{S^p_l}[f_1(t+x),f_1(t+h_k)]<\varepsilon.$$

Поэтому выражение (7) не превосходит следующего:

$$\frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}\varepsilon^p dx=\varepsilon^p,$$

что и требовалось доказать для выполнения (5).

Таким образом, для каждого $\varepsilon>0$ существует интегральная сумма $\sigma(f_1)$, соответствующая разбиению, не зависящему от $t\in\mathbb{R}^n$, такая, что

$$D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)}f_1(x+t)dx,\sigma(f_1)]<\varepsilon.$$

Тогда

$$D_{W^p}[\sigma(f_1),1]\le D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)}f_1(x+t)dx,\sigma(f_1)]+$$

$$+D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)}f_1(x+t)dx,1].$$

Проверим, что $D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx, 1] < \varepsilon$. Из неравенства (1) следует, что

$$\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx - 1\right|^p < \varepsilon^p. \tag{8}$$

Используя (8), выпишем очевидную цепочку неравенств:

$$D_{W^p}[\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx, 1] =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(y,lI)}\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx - 1\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1}{l^n}l^n\varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Отсюда, $D_{W^p}[\sigma(f_1), 1] < 2\varepsilon$.

Возвращаясь к прежним обозначениям, имеем:

$$D_{W^p}[\frac{\alpha}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f(t+h_k)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}e^{-i\langle\lambda,h_k\rangle}\mu(B_k), 1] < 2\varepsilon.$$

Положив $A_k := \frac{\alpha\mu(B_k)e^{-i\langle\lambda,h_k\rangle}}{T^n}$ имеем:

$$D_{W^p}[\sum_{k=1}^{N} A_k f(t+h_k), e^{i\langle\lambda,t\rangle}] < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что $\lambda \in sp_B f$.

2) В случае, когда $D = D_{S^p}$, необходимо повторить доказательство практически дословно. В частях доказательства, содержащих предел при $l \to \infty$, в этом случае необходимо выбрать $l = 1$. Поскольку $S$ – расстояния, соответствующие различным $l$, топологически эквивалентны, то включение доказано и для $D = D_{S^p_l}$.

3) Рассмотрим случай, когда $D = D_{B^p}$.

Пусть $\lambda \in spf$. Обозначим $f_1(t) = \frac{1}{\alpha}f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}$, где $\alpha = M\{f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\} \neq 0$. Это означает, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t)dx = 1.$$

Таким образом, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует (возможно зависящее от $t \in \mathbb{R}^n$) число $T_0 = T_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $T > T_0$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t)dx - 1\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма, соответствующая интегралу, записанному выше, приближающая его в метрике Безиковича. Так как $f_1(t)$ — $B^p$-п.-п. функция, то она $B^p$-равномерно непрерывна, то есть для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при $|h| < \delta$, выполнено

$$D_{B^p}[f_1(t+h), f_1(t)] < \varepsilon. \tag{10}$$

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{N}$ — произвольное разбиение бруса $\Omega(-TI, 2TI)$, но такое, что $\mathrm{diam(B_k)} < \delta$ ($\mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{N}}$), где $\delta$ взято из (10). Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \mu(B_k) = (2T)^n$, где $\mu$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\{h_k\}_{k=1}^{N}$ — произвольный набор точек в $\mathbb{R}^n$ таких, что $h_k \in B_k, k = \overline{1, N}$. Тогда интегральная сумма, соответствующая данному разбиению, будет иметь вид:

$$\sigma(f_1) = \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} f_1(t + h_k)\mu(B_k).$$

Покажем, что $D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x + t)dx, \sigma(f_1)] < \varepsilon$, то есть, что существует такое $S_0 > 0$, что для каждого $S > S_0$ выполнено неравенство:

$$\left(\frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} \left| \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t)dx - \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} f_1(t+h_k)\mu(B_k) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{11}$$

или

$$\left(\frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} \left| \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} (f_1(x+t) - f_1(t+h_k))dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{12}$$

Применив неравенство Гельдера к выражению
$\left| \frac{1}{(2T)^n} \sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} (f_1(x+t) - f_1(t+h_k))dx \right|^p$, получим, что оно не превосходит

$$\frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} |f_1(x+t) - f_1(t+h_k)|^p \, dx.$$

Для выполнения (12) достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} |f_1(x+t) - f_1(t+h_k)|^p \, dxdt < \varepsilon^p \tag{13}$$

или

$$\frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} \frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(x+t) - f_1(t+h_k)|^p \, dtdx < \varepsilon^p. \tag{14}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое суммы. Пусть $\forall x \in B_k, \max\{|\mathrm{x}|,|\mathrm{h_k}|\} = \mathrm{b_k}$.

Тогда верна следующая цепочка неравенств:

$$\left(\frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(x+t) - f_1(t+h_k)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\tfrac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(x+t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\tfrac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(t+h_k)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2^{n+1}(S+b_k)^n}{(2S)^n} \frac{1}{2^n(S+b_k)^n} \int\limits_{\Omega((-S-b_k)I,2(S+b_k)I)} |f_1(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Поскольку $f_1(t)$ – $B^p$-п.п. функция, то при достаточно больших $S$ существует $C_k > 0$, $k = 1, .., N$ такое, что $\left(\frac{1}{2^n(S+b_k)^n} \int\limits_{\Omega((-S-b_k)I, 2(S+b_k)I)} |f_1(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < C_k$, поэтому (15) при достаточно больших $S$ и с учетом ограниченности множителя $\left(\frac{2^{n+1}(S+b_k)^n}{(2S)^n}\right)^{\frac{1}{p}}$ не превосходит некоторой константы, а, значит, и каждое выражение вида $\frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(x+t) - f_1(t+h_k)|^p \, dt$ будет ограничено при достаточно больших $S$.

Далее, совершая предельный переход, получим, что выполнено следующее неравенство:

$$\overline{\lim_{S\to\infty}} \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} \frac{1}{(2S)^n} \int\limits_{\Omega(-SI,2SI)} |f_1(t+x) - f_1(t+h_k)|^p dt dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} D^p_{B^p}[f_1(t+x), f_1(t+h_k)] dx. \tag{16}$$

Применим неравенство (10). Поскольку $\mu(B_k) < \delta$, $k = \overline{1, N}$, то $\forall x \in B_k$ выполнено $|(x+t) - (t+h_k)| < \delta$. Значит, для каждого $k = \overline{1, N}$ и каждого $x \in B_k$ выполнено неравенство:

$$D^p_{B^p}[f_1(t+x), f_1(t+h_k)] < \varepsilon^p. \tag{17}$$

Следовательно, выражение (16) не превосходит:

$$\frac{1}{(2T)^n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{B_k} \varepsilon^p dx = \varepsilon^p,$$

что и требовалось доказать для выполнения (13).

Таким образом, имеем

$$D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t) dx, \sigma(f_1)] \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$D_{B^p}[\sigma(f_1), 1] \leq D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t) dx, \sigma(f_1)] +$$

$$+ D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t) dx, 1].$$

Проверим, что $D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t) dx, 1] < \varepsilon$. Из неравенства (9) следует, что

$$\left|\frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t) dx - 1\right|^p \leq \varepsilon^p. \tag{18}$$

Используя (18), выпишем очевидную цепочку неравенств:

$$D_{B^p}[\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(x+t)dx, 1] =$$

$$= \left(\overline{\lim_{S\to\infty}}\frac{1}{(2S)^n}\int\limits_{\Omega(-SI,2SI)}\left|\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{\Omega(-TI,2TI)} f_1(t+x)dx - 1\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\overline{\lim_{S\to\infty}}\frac{1}{(2S)^n}(2S)^n\varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Отсюда, $D_{B^p}[\sigma(f_1), 1] < 2\varepsilon$.

Возвращаясь к прежним обозначениям и положив $A_k := \frac{\alpha\mu(B_k)e^{-i\langle\lambda,h_k\rangle}}{(2T)^n}$, имеем:

$$D_{B^p}[\sum_{k=1}^{N} A_k f(t+h_k), e^{i\langle\lambda,t\rangle}] < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ получаем, что $\lambda \in sp_B f$.

4) Рассмотрим случай $D = D_U$.

Пусть $\lambda \in spf$, тогда положим $f_1(t) = \frac{1}{\alpha}f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}$, где $\alpha = M\{f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx = 1$, причем равномерно по параметру $t \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует независящее от $t$ число $T_0 = T_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $T > T_0$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(x+t)dx - 1\right| < \varepsilon. \tag{19}$$

Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма, соответствующая интегралу, записанному выше, приближающая его равномерно по $t \in \mathbb{R}^n$. Так как $f_1(t)$ — равномерная п.п. функция, то она равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^n$, то есть для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если $|h| < \delta$, то для любого $t \in \mathbb{R}^n$

$$|f_1(t+h) - f_1(t)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Как и раньше, пусть $\{B_k\}_{k=1}^N$ — произвольное разбиение бруса $\Omega(0,TI)$, но такое, что $\mathrm{diam(B_k)} < \delta$ $(\mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{N}})$, где $\delta$ взято из (20). Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu(B_k) = T^n$ (где $\mu$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$). Пусть $\{h_k\}_{k=1}^N$ — произвольный набор точек в $\mathbb{R}^n$ таких, что $h_k \in B_k$, $k = \overline{1,N}$. Тогда интегральная сумма, соответствующая данному разбиению, будет иметь вид:

$$\sigma(f_1) = \frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f_1(t+h_k)\mu(B_k).$$

Оценивая $\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx - \sigma(f_1)\right|$, имеем:

$$\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx - \frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f_1(t+h_k)\mu(B_k)\right| =$$

$$= \frac{1}{T^n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}(f_1(t+x)-f_1(t+h_k))dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{T^n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B_k}|f_1(t+x)-f_1(t+h_k)|\,dx. \tag{21}$$

Заметим, что если $\mathrm{diam(B_k)} < \delta$ ($\mathrm{k} = \overline{\mathrm{1,N}}$), то для любого $x \in B_k$ верно следующее: $|(x+t)-(t+h_k)| = |x-h_k| < \delta$, отсюда, в силу (20) следует

$$|f_1(x+t)-f_1(t+h_k)| < \varepsilon. \tag{22}$$

Используя (22) для (21), получаем, что (21) не превосходит величины $\frac{1}{T^n}\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{N}\mu(B_k) = \frac{1}{T^n}\varepsilon T^n = \varepsilon$.

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма $\sigma(f_1)$, соответствующая разбиению (независящему от $t$), такая что

$$\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx - \sigma(f_1)\right| < \varepsilon\ (\forall t\in\mathbb{R}^n). \tag{23}$$

Из неравенств (19) и (23) получаем следующее:

$$|\sigma(f_1)-1| \le \left|\sigma(f_1) - \frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f_1(t+x)dx - 1\right| < 2\varepsilon$$

или, вернувшись к прежним обозначениям, имеем:

$$\left|\frac{\alpha}{T^n}\sum_{k=1}^{N} f(t+h_k)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}e^{-i\langle\lambda,h_k\rangle}\mu(B_k) - 1\right| < 2\varepsilon.$$

Положив $A_k := \frac{\alpha\mu(B_k)e^{-i\langle\lambda,h_k\rangle}}{T^n}$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{N} A_k f(t+h_k) - e^{i\langle\lambda,t\rangle}\right| < 2\varepsilon,$$

отсюда $\lambda \in sp_B f$, что и требовалось доказать.

Тем самым, включение $spf \subset sp_B f$ доказано для случаев $D = D_U, D_{S_l^p}, D_{W^p}, D_{B^p}$.

Докажем включение $sp_B f \subset spf$. Будем доказывать методом от противного.

1) Рассмотрим случай $D = D_{W^p}$.

Пусть $\lambda \in sp_B f \setminus spf$. Используя свойства среднего, имеем следующую цепочку равносильных утверждений:

$$\lambda \notin spf \Leftrightarrow M\{f(t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\} = 0 \Leftrightarrow M\{f(t+x)e^{-i\langle\lambda,t+x\rangle}\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M\{f(t+x)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\} = 0. \tag{24}$$

Поскольку $\lambda \in sp_B f$, то $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\{A_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R} \ \ \exists\{h_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ :

$$D_{W^p}[e^{i\langle\lambda,x\rangle}, \sum_{k=1}^m A_k f(x+h_k)] < \varepsilon.$$

Другими словами, $\forall\varepsilon > 0\exists\{A_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R} \ \ \exists\{h_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ : $\lim\limits_{l\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n}(\frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(t,\,lI)} \left|\sum\limits_{k=1}^m A_k f(h_k+x) - e^{i\langle\lambda,x\rangle}\right|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. В дальнейшем $\varepsilon$ фиксируем и будем считать $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Отсюда существует $l < \infty$ :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(t,\,lI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x) - e^{i\langle\lambda,x\rangle} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Поэтому для каждого $t \in \mathbb{R}^n$ выполнено следующее неравенство:

$$\left( \frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(t,\,lI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x) - e^{i\langle\lambda,x\rangle} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

или $\left( \frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(t,\,lI)} \left| \sum\limits_{k=1}^m A_k f(h_k+x)e^{-i\langle\lambda,x\rangle} - 1 \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$.

Сделав замену переменных, получим:

$$\left( \frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(0,\,lI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t+x\rangle} - 1 \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{25}$$

Применяя к (25) неравенство Гельдера, имеем:

$$\frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(0,\,lI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t+x\rangle} - 1 \right| dx \le$$

$$\le \left( \frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(0,\,lI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t+x\rangle} - 1 \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \tag{26}$$

Проинтегрировав левую часть (26) по $\Omega(0,TI)$, где $T > T_0$, и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\frac{1}{l^n} \int\limits_{\Omega(0,\,lI)} \frac{1}{T^n} \int\limits_{\Omega(0,TI)} \left| \sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,x+t\rangle} - 1 \right| dtdx < \varepsilon.$$

Далее:

$$\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,\,lI)}\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)}\left(\sum_{k=1}^m A_k f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,x+t\rangle}-1\right)dt\right|dx<\varepsilon.$$

Или

$$\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,\,lI)}\left|\sum_{k=1}^m A_k e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}dt-1\right|dx<\varepsilon. \tag{27}$$

Из (24), пользуясь определением среднего, получим:

$$\forall\varepsilon_1>0\,\exists T_0>0\forall T>T_0:\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,\,TI)} f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}dt\right|<\varepsilon_1, \tag{28}$$

где выберем $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^m |A_k|}$.

В силу (28) имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^m A_k e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}dt\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^m|A_k|\cdot\left|\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}dt\right|<\varepsilon_1\sum_{k=1}^m|A_k|=\varepsilon.$$

Поэтому

$$\frac{1}{l^n}\int\limits_{\Omega(0,\,lI)}\left|\sum_{k=1}^m A_k e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\frac{1}{T^n}\int\limits_{\Omega(0,TI)} f(h_k+x+t)e^{-i\langle\lambda,t\rangle}dt-1\right|dx>1-\varepsilon.$$

Полученное неравенство противоречит (27) и выбору $\varepsilon$, значит включение $sp_B f\subset spf$ в этом случае доказано.

2) Нетрудно видеть, что в случае, когда $D=D_{S^p}$, доказательство лишь упрощается. Достаточно выбрать $l=1$ и дословно повторить основную часть доказательства.

3) Рассмотрим случай $D=D_{B^p}$. Заметим, что (24) по-прежнему выполнено.

Пусть $\lambda\in sp_B f\setminus spf$, тогда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\{A_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{R}\ \ \exists\{h_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{R}^n$ :

$$D_{B^p}[e^{i\langle\lambda,x\rangle},\sum_{k=1}^m A_k f(x+h_k)]<\varepsilon.$$

Другими словами, $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\{A_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{R}\ \ \exists\{h_k\}_{k=1}^m\subset\mathbb{R}^n$ : $\left(\overline{\lim\limits_{T\to\infty}}\frac{1}{(2T)^n}\int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)}\left|\sum\limits_{k=1}^m A_k f(h_k+x)-e^{i\langle\lambda,x\rangle}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$, будем по-прежнему считать $\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Применяя неравенство Гельдера, имеем:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{(2T)^n} \left| \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} \left( \sum_{k=1}^{m} A_k f(h_k + x) - e^{i\langle\lambda,x\rangle} \right) \right| dx < \varepsilon. \tag{29}$$

Далее получим:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} f(h_k + x) e^{-i\langle\lambda,x\rangle} dx - 1 \right| < \varepsilon. \tag{30}$$

С другой стороны, из (24), пользуясь определением среднего, получим:

$$\forall h_k > 0\ \exists T_k > 0 \forall T > T_k : \left| \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} f(h_k + t) e^{-i\langle\lambda,t\rangle} dt \right| < \varepsilon_1, \tag{31}$$

где выберем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{m} |A_k|}$.

В силу (31) при всех $T > \max\limits_k T_k$ имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} f(h_k + x) e^{-i\langle\lambda,t\rangle} dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |A_k| \cdot \left| \frac{1}{T^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} f(h_k + x) e^{-i\langle\lambda,x\rangle} dx \right| < \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{m} |A_k| = \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{(2T)^n} \int\limits_{\Omega(-TI,\,2TI)} f(h_k + x) e^{-i\langle\lambda,x\rangle} dx - 1 \right| > 1 - \varepsilon.$$

Полученное неравенство противоречит (30) и выбору $\varepsilon$, значит включение $sp_B f \subset spf$ в этом случае доказано.

4) В случае равномерной метрики, имея (24) и неравенство $|M\{f(t)\}| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^n} |f(t)|$, вместо (25)–(27) получим: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\{A_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}\ \ \ \exists\{h_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ :

$$|M\{\sum_{k=1}^{m} A_k f(t + h_k) e^{-i\langle\lambda,t\rangle} - 1\}| < \varepsilon.$$

Далее:

$$|\sum_{k=1}^{m} A_k M\{f(t + h_k) e^{-i\langle\lambda,t\rangle}\} - 1| < \varepsilon,$$

что противоречит выбору $\varepsilon$.

Таким образом, теорема доказана полностью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.S. Besicovitch *Almost periodic function.* Cambridge university press, 1932. 253 p.
2. A. Beurling *On the spectral synthesis of bounded functions.* Acta Math. 81. (1948). 14 pp.
3. S.Yu. Favorov, N. Girya *A multidimensional version of Levin's secular constant Theorem and its applications* // Jorn. of Math. Phisics, Analysis, Geometry. 2007. Vol. 3. №3. P. 365—377.
4. L.H. Loomis *The Spectral Characterization of a Class of Almost Periodic Functions* // Annals of Mathematics, Second Series. Vol. 72, No. 2 (Sep., 1960). P. 362–368.
5. L.I. Ronkin *Almost periodic distributions and divisors in tube domains* // Zap. Nauchn. Sem. POMI **247**. 1997. P. 210–236 (Russian).
6. Бор Г. *Почти периодические функции.* ОГИЗ. 1934. 128 с.
7. Гиря Н.П., Фаворов С.Ю. *Асимптотические свойства почти периодических функций* // 2006. Т. 25. № 2. С. 191—201.
8. Гиря Н.П. *Почти периодические в метрике Безиковича функции* // Мат. студии. 2007. Т. 27, № 2. С. 163-–173.
9. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
10. Степанов В.В. *Об одном классе почти периодических функций* // ДАН СССР. 1949. Т. LXIV. № 3. С. 297.

Наталия Петровна Гиря,
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: n_girya@mail.ru

Сергей Юрьевич Фаворов,
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4,
61022, г. Харьков, Украина
E-mail: sfavorov@gmail.com