

# СВЕРТКА, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА ПОРОЖДАЕМЫЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ ИОНКИНА

Б.Е. КАНГУЖИН, Н.Е. ТОКМАГАМБЕТОВ

**Аннотация.** В данной работе с  $\mathcal{B}$ , оператором второго порядка с нелокальными краевыми условиями, связывается свое преобразование Фурье и свертка. Исследуются свойства введенной свертки, а затем описывается класс пробных функций. Также введены пространства Соболева и получено тождество Планшереля, связанные с оператором  $\mathcal{B}$ .

**Ключевые слова:** свертка, преобразование Фурье, нелокальное краевое условие, пробные функции, пространство Соболева, тождество Планшереля, дифференциальный оператор, задача Ионкина.

**Mathematics Subject Classification:** 43A99, 46F12, 42A16, 34B10, 45J05

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Стандартное преобразование Фурье является унитарным преобразованием в гильбертовом пространстве  $L_2(0, b)$  и порождается оператором дифференцирования  $(-i\frac{d}{dx})$ , поскольку система экспонент  $\{exp(i\lambda x), \lambda \in R\}$  представляет систему «собственных» функций соответствующего его непрерывному спектру. С преобразованием Фурье тесным образом связана билинейная, коммутативная, ассоциативная свертка без аннуляторов. В работах [1]–[4] вместо оператора дифференцирования  $(-i\frac{d}{dx})$  в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$  рассмотрен в гильбертовом пространстве  $L_2(0, b)$  при  $b < \infty$ , оператор порожденный дифференциальным выражением  $(-i\frac{d}{dx})$ , и введены преобразования Фурье и свертки, порожденные этим оператором. В работе [5] развит анализ Фурье, порожденный дифференциальным оператором в ограниченной области с собственными значениями, кратности которых равны единице. Главное отличие данной работы от работы [5] – порождающий оператор имеет собственные значения с кратностями, не равными единице. В данной статье вводится понятие преобразования Фурье и свертка, порождаемые оператором двукратного дифференцирования в пространстве  $L_2(0, 1)$  с нелокальными краевыми условиями изученной в работе [6]. Известно, какую роль играют понятия обобщенного решения дифференциальных уравнений. Оказывается, что нелокальные краевые операторы порождают свой индивидуальный класс пробных функций. В связи с чем возникают новые классы обобщенных функций, которые отражают специфику нелокальных краевых условий.

---

В.Е. KANGUZHIN, N.E. TOKMAGAMBETOV, CONVOLUTION, FOURIER TRANSFORM AND SOBOLEV SPACES GENERATED BY NON-LOCAL IONKIN PROBLEM.

© Кангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. 2015.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0757/ГФ4). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант 0773/ГФ4).

Поступила 19 февраля 2015 г.

В гильбертовом пространстве  $L_2(0, 1)$  определим оператор  $\mathcal{B}$ , порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) \equiv -\frac{d^2u(x)}{dx^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (1.1)$$

с областью определения

$$D(\mathcal{B}) = \{u \in W_2^2[0, 1] : u(0) = 0, u'(0) = u'(1)\},$$

спектральные свойства которого были подробно изучены в работе Н.И. Ионкина [6]. Оператор  $\mathcal{B}$  не является самосопряженным, но его система собственных и присоединенных функций является базисом в  $L_2(0, 1)$ . Это дает развить негармонический анализ, связанный с оператором  $\mathcal{B}$ . Негармонический анализ, порожденный системами экспонент, детально изучен в работах А. М. Седлецкого [7]–[9]. В последующих работах будут введены псевдо-дифференциальные операторы и другие элементы гармонического анализа, порожденные оператором  $\mathcal{B}$ .

Сопряженный оператор к  $\mathcal{B}$ , который порождается дифференциальным выражением (1.1) и краевыми условиями

$$v'(1) = 0, \quad v(0) = v(1), \quad (1.2)$$

обозначим через  $\mathcal{B}^*$ .

Оператор  $\mathcal{B}$  имеет собственные значения

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и собственные и присоединенные функции

$$u_0(x) = x, \quad u_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx), \quad u_{2k}(x) = x \cos(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Это означает, что при  $k > 0$  функции из (1.3) принадлежат  $D(\mathcal{B})$  и являются решениями дифференциальных уравнений

$$-u_{2k-1}''(x) = \lambda_k u_{2k-1}(x),$$

$$-u_{2k}''(x) = \lambda_k u_{2k}(x) + 2\sqrt{\lambda_k} u_{2k-1}(x).$$

Каждому собственному значению  $\lambda_k$  при  $k > 0$  соответствует собственная функция  $u_{2k-1}(x)$

и присоединенная  $u_{2k}(x)$ .

А оператор  $\mathcal{B}^*$  имеет собственные значения

$$\mu_k = (2\pi k)^2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и собственные и присоединенные функции

$$v_0(x) = 2, \quad v_{2k-1}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx), \quad v_{2k}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

При этом каждому собственному значению  $\mu_k$  при  $k > 0$  соответствует собственная функция  $v_{2k}(x)$  и присоединенная  $v_{2k-1}(x)$ , то есть для функций из (1.4) выполняются соотношения

$$-v_{2k}''(x) = \mu_k v_{2k}(x),$$

$$-v_{2k-1}''(x) = \mu_k v_{2k-1}(x) + 2\sqrt{\mu_k} v_{2k}(x)$$

и краевые условия (1.2).

Из работы [6] известны следующие результаты.

**Лемма 1.1.** Последовательности функций (1.3) и (1.4) образуют биортогональную на интервале  $(0, 1)$  систему функций, так что для любых номеров  $i, j \in \mathbb{N}$  выполняется соотношение

$$(u_{2i-k}, v_{2j-l}) = \int_0^1 u_{2i-k}(x)v_{2j-l}(x)dx = \delta_{2i-k, 2j-l}, \quad k = 0, m_i - 1; \quad l = 0, m_j - 1,$$

здесь  $\delta_{2i-k, 2j-l}$  – символ Кронекера,  $m_0 = 1$  и  $m_i = 2$ ,  $i \geq 1$ .

**Теорема 1.1.** Последовательность функций

$$u_0(x) = x, \quad u_{2k-1}(x) = \sin(2\pi kx), \quad u_{2k}(x) = x \cos(2\pi kx), \quad k \in \mathbb{N}$$

образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, 1)$ .

## 2. СВЕРТКА, ПОРОЖДАЕМАЯ ОПЕРАТОРОМ $\mathcal{B}$

В пространстве  $L_2(0, 1)$  введем свертку по формуле

$$(g * f)(x) = \frac{1}{2} \int_x^1 g(1+x-t)f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 g(x-1+t)f(t)dt + \\ + \int_0^x g(x-t)f(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^{1-x} g(1-x-t)f(t)dt + \frac{1}{2} \int_0^x g(1+t-x)f(t)dt.$$

**Лемма 2.1.** а) Введенная свертка при любых  $f, g \in L_2(0, 1)$  билинейна, коммутативна и ассоциативна.

б) Резольвента оператора  $\mathcal{B}$  имеет сверточное представление

$$(\mathcal{B} - \lambda I)^{-1} f = g * f,$$

где  $g(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)}$ ,  $I$  – единичный оператор.

в) Свертка функций  $g$  и  $f$  принадлежит области определения оператора  $\mathcal{B}$ , если  $g \in D(\mathcal{B})$ , причем справедливо равенство

$$\mathcal{B}(g * f) = \mathcal{B}g * f.$$

г) Свертка, порождаемая оператором  $\mathcal{B}$ , без аннуляторов, то есть если при всех  $g \in L_2(0, 1)$  справедливо  $g * f \equiv 0$ , то  $f \equiv 0$ .

**Доказательство леммы 2.1.** а) Билинейность и ассоциативность введенной свертки проверяется тривиально. Покажем, что введенная свертка коммутативна в пространстве суммируемых функций. Введем интегралы по формулам

$$I_1(g, f) = \int_x^1 g(1+x-t)f(t)dt, \quad I_2(g, f) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt, \\ I_3(g, f) = \int_0^{1-x} g(1-x-t)f(t)dt, \quad I_4(g, f) = \int_{1-x}^1 g(x-1+t)f(t)dt, \\ I_5(g, f) = \int_0^x g(1+t-x)f(t)dt,$$

где  $x \in (0, 1)$ .

Легко убедиться, что

$$I_k(g, f) = I_k(f, g) \quad \text{при } k = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим  $I_4(g, f)$  и сделаем замену  $\tau = x - 1 + t$  в соответствующем интеграле. Тогда имеем соотношение

$$I_4(g, f) = \int_0^x g(\tau) f(1 - x + \tau) d\tau.$$

Отсюда следует, что  $I_4(g, f) = I_5(f, g)$ . Точно также проверяется соотношение  $I_5(g, f) = I_4(f, g)$ . Поскольку по определению свертки

$$g * f = \frac{1}{2} I_1(g, f) + I_2(g, f) - \frac{1}{2} I_3(g, f) + \frac{1}{2} I_4(g, f) + \frac{1}{2} I_5(g, f),$$

то имеем коммутативное равенство  $g * f = f * g$ .

b) Обозначим через

$$y(x, \lambda) = (g * f)(x),$$

где  $g(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)}$ . Вычислим производную от  $y(x, \lambda)$  по  $x$ .

$$\begin{aligned} y'(x, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \int_x^1 \sin \sqrt{\lambda}(1 + x - t) f(t) dt + \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(x - t) f(t) dt - \right. \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \sin \sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \sin \sqrt{\lambda}(x - 1 + t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}(1 + t - x) f(t) dt \left. \right] = \\ &= \frac{f(x)}{2\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ -\sin \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ \frac{1}{2} \int_x^1 \cos \sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x - t) f(t) dt + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{1-x} \cos \sqrt{\lambda}(1 - x - t) f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{1-x}^1 \cos \sqrt{\lambda}(x - 1 + t) f(t) dt - \\ &\left. - \frac{1}{2} \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(1 + t - x) f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Точно также вычисляется вторая производная от  $y(x, \lambda)$  по  $x$ . В результате имеем

$$y''(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ -\cos \sqrt{\lambda} f(x) + 2f(x) - f(x) - f(x) - \cos \sqrt{\lambda} f(x) \right] - \lambda y(x, \lambda).$$

Отсюда следует, что  $y(x, \lambda)$  удовлетворяет уравнению

$$-y''(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda) + f(x).$$

Остается проверить выполнение краевых условий. Первое краевое условие проверяется непосредственной подстановкой  $x = 0$ .

$$y(0, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt - \int_0^1 \sin \sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt \right] = 0.$$

Проверка второго краевого условия.

$$y'(0, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ \int_0^1 \cos \sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt + \int_0^1 \cos \sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt \right],$$

$$y'(1, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda} - 1)} \left[ 2 \int_0^1 \cos \sqrt{\lambda}(1 - t) f(t) dt + \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} t) f(t) dt - \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda} t) f(t) dt \right].$$

Отсюда  $y'(0) = y'(1)$ .

с) Пусть  $g \in D(\mathcal{B})$ . Рассмотрим свертку  $g * f$ , где  $f \in L_2(0, 1)$ . Поскольку  $g \in D(\mathcal{B})$ , то  $g * f \in W_2^2[0, 1]$ . Действительно, справедливы следующие представления первой и второй производных свертки по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(g * f)(x) &= \int_x^1 g'(1+x-t)f(t)dt + \int_{1-x}^1 g'(x-1+t)f(t)dt + \\ &+ 2 \int_0^x g'(x-t)f(t)dt + \int_0^{1-x} g'(1-x-t)f(t)dt - \int_0^x g'(1+t-x)f(t)dt, \\ \frac{d^2}{dx^2}(g * f)(x) &= (g'' * f)(x). \end{aligned}$$

При выводе указанных соотношений существенно использовалось то, что  $g(0) = 0$  и  $g'(0) = g'(1)$ .

д) Пусть для всех  $g \in L_2(0, 1)$  свертка  $g * f \equiv 0$ . Введем функцию  $g(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}(\cos \sqrt{\lambda}-1)} \Big|_{\lambda=1}$ , которая корректно определена, так как  $\cos 1 \neq 1$ . Согласно утверждению б) свертка  $g * f$  означает  $(\mathcal{B} - I)^{-1}f$ . Если  $(\mathcal{B} - I)^{-1}f(x) \equiv 0$ , то  $f(x) \equiv 0$ . Что и требовалось показать.

Лемма 2.1 полностью доказана.

Приведем одно полезное тождество.

**Лемма 2.2.** Для любых комплексных  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо соотношение

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} * \frac{\sin(\beta x)}{\beta} = \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos \beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2). \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Обозначим через

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} * \frac{\sin(\beta x)}{\beta}$$

и

$$u(x) = \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos \beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2).$$

Из утверждения б) леммы 2.1 следует, что функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению

$$-y''(x) = \alpha^2 y(x) + \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \quad (2.2)$$

и краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1). \quad (2.3)$$

Теперь докажем, что функция  $u(x)$  также как и функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению (2.2) и краевым условиям (2.3). Тем самым получим требуемое.

Найдем первую и вторую производную от функции  $u(x)$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left( \alpha \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}(\cos \beta - 1) - \beta \frac{\cos(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2), \\ u''(x) &= \left( -\alpha^2 \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos \beta - 1) + \beta^2 \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) = \\ &= -\alpha^2 \left( \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}(\cos \beta - 1) - \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) + \\ &\quad + (\beta^2 - \alpha^2) \left( \frac{\sin(\beta x)}{\beta}(\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) = \end{aligned}$$

$$= -\alpha^2 u(x) + \frac{\sin(\beta x)}{\beta} (\cos \alpha - 1).$$

Таким образом установили, что функция  $u(x)$  удовлетворяет уравнению (2.2). Не сложные вычисления

$$u(0) = \left( \frac{\sin(\alpha 0)}{\alpha} (\cos \beta - 1) - \frac{\sin(\beta 0)}{\beta} (\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

$$u'(0) = \left( \alpha \frac{1}{\alpha} (\cos \beta - 1) - \beta \frac{1}{\beta} (\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) =$$

$$= ((\cos \beta - 1) - (\cos \alpha - 1)) / (\beta^2 - \alpha^2) = (\cos \beta - \cos \alpha) / (\beta^2 - \alpha^2),$$

$$u'(1) = \left( \alpha \frac{\cos \alpha}{\alpha} (\cos \beta - 1) - \beta \frac{\cos \beta}{\beta} (\cos \alpha - 1) \right) / (\beta^2 - \alpha^2) =$$

$$= (\cos \alpha (\cos \beta - 1) - \cos \beta (\cos \alpha - 1)) / (\beta^2 - \alpha^2) = (\cos \beta - \cos \alpha) / (\beta^2 - \alpha^2),$$

влекут за собой выполнение краевых условий (2.3). Лемма 2.2 полностью доказана.

Преобразуем формулу (2.1) в следующий вид

$$\sin(\alpha x) * \sin(\beta x) = \frac{(\beta \sin(\alpha x)(\cos \beta - 1) - \alpha \sin(\beta x)(\cos \alpha - 1))}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (2.4)$$

**Лемма 2.3.** Для  $\xi \in \mathbb{Z}_+$  справедливо

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = 0.$$

**Доказательство.** Чтобы доказать лемму, нам понадобятся следующие тождества, которые следуют из формулы (2.4) подстановками и простыми вычислениями. Подставив в формуле (2.4)  $\beta = 2\pi\xi$  для  $\xi > 0$ , получим, что

$$\sin(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \frac{\alpha \sin(2\pi\xi x)(\cos \alpha - 1)}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2}. \quad (2.5)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 2\pi\xi$  в (2.5), имеем

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \sin(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{\alpha \sin(2\pi\xi x)(\cos \alpha - 1)}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2} = 0. \quad (2.6)$$

Лемма доказана.

Заметим также, что для любого целого  $\eta$

$$\sin(2\pi\eta x) * \sin(2\pi\xi x) = 0, \quad (2.7)$$

так как  $\cos \alpha - 1 = 0$  при  $\alpha = 2\pi\xi$ .

**Лемма 2.4.** Для  $\xi \in \mathbb{Z}_+$  справедливо тождество

$$x \cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4} \sin(2\pi\xi x). \quad (2.8)$$

**Доказательство.** Теперь обе части тождества (2.5) дифференцируя по  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} & x \cos(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \\ & = \sin(2\pi\xi x) \frac{[\cos \alpha - 1 - \alpha \sin \alpha](\alpha^2 - (2\pi\xi)^2) - 2\alpha^2(\cos \alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 2\pi\xi$  из (2.9), имеем

$$\begin{aligned} & x \cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\xi x) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} x \cos(\alpha x) * \sin(2\pi\xi x) = \\ & = \sin(2\pi\xi x) \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{[\cos \alpha - 1 - \alpha \sin \alpha](\alpha^2 - (2\pi\xi)^2) - 2\alpha^2(\cos \alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2} = \\ & = -\sin(2\pi\xi x) \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{\alpha \sin \alpha}{\alpha^2 - (2\pi\xi)^2} + 2 \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{\alpha^2(\cos \alpha - 1)}{(\alpha^2 - (2\pi\xi)^2)^2} \right] = \\ & = -\sin(2\pi\xi x) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = -\frac{1}{4} \sin(2\pi\xi x). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство (2.8).

Лемма 2.4 доказана.

**Лемма 2.5.** Для  $\xi \in \mathbb{Z}_+$  справедливо тождество

$$x \cos(2\pi\xi x) * x \cos(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4} \sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4} x \cos(2\pi\xi x).$$

**Доказательство.** Вычислим

$$\begin{aligned} & x \cos(2\pi\xi x) * x \cos(2\pi\xi x) = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\alpha} \left[ \lim_{\beta \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\beta} (\sin(\alpha x) * \sin(\beta x)) \right] = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\alpha} \left[ \lim_{\beta \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\beta} \left( \frac{(\beta \sin(\alpha x)(\cos \beta - 1) - \alpha \sin(\beta x)(\cos \alpha - 1))}{\beta^2 - \alpha^2} \right) \right] = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\alpha} \left[ \lim_{\beta \rightarrow 2\pi\xi} K(\alpha, \beta) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) &= \frac{\sin(\alpha x)(\cos \beta - 1 - \beta \sin \beta) - \alpha x \cos(\beta x)(\cos \alpha - 1)}{\beta^2 - \alpha^2} \\ &\quad - \frac{2\beta(\beta \sin(\alpha x)(\cos \beta - 1) - \alpha \sin(\beta x)(\cos \alpha - 1))}{(\beta^2 - \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 2\pi\xi} K(\alpha, \beta) &= -x \cos(2\pi\xi x) \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} + \\ &\quad + 4\pi\xi \sin(2\pi\xi x) \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2}, \end{aligned}$$

то приходим к

$$\begin{aligned} & x \cos(2\pi\xi x) * x \cos(2\pi\xi x) = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} \frac{d}{d\alpha} \left[ -x \cos(2\pi\xi x) \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} + 4\pi\xi \sin(2\pi\xi x) \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} F(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$F(\alpha) = -x \cos(2\pi\xi x) \left( \frac{\cos \alpha - 1 - \alpha \sin \alpha}{(2\pi\xi)^2 - \alpha^2} + 2\alpha \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2} \right) + \\ + 4\pi\xi \sin(2\pi\xi x) \left( \frac{\cos \alpha - 1 - \alpha \sin \alpha}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^2} + 4\alpha \frac{\alpha(\cos \alpha - 1)}{((2\pi\xi)^2 - \alpha^2)^3} \right).$$

Вычислим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2\pi\xi} F(\alpha) = -\frac{1}{4} \sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4} x \cos(2\pi\xi x).$$

Окончательно имеем

$$x \cos(2\pi\xi x) * x \cos(2\pi\xi x) = -\frac{1}{4} \sin(2\pi\xi x) - \frac{1}{4} x \cos(2\pi\xi x).$$

Таким образом, лемма 2.5 доказана полностью.

Следующее равенство проверяется непосредственными вычислениями

$$x * x = \frac{1}{2}x. \quad (2.10)$$

Аналогичными рассуждениями не сложно показать, что для  $\xi \neq \eta > 0$  имеют место тождества

$$\sin(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\eta x) = 0, \quad x \cos(2\pi\xi x) * \sin(2\pi\eta x) = 0, \\ x \cos(2\pi\xi x) * x \cos(2\pi\eta x) = 0, \quad \sin(2\pi\xi x) * x = 0, \quad x \cos(2\pi\xi x) * x = 0. \quad (2.11)$$

### 3. ПРОБНЫЕ ФУНКЦИИ, $\mathcal{B}$ -ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПРОСТРАНСТВА СОВОЛЕВА $\mathcal{B}W_2^s[0, 1]$

При определении распределений на  $\mathbb{R}$  важную роль играет выбор класса пробных функций. В качестве пробных функции на  $\mathbb{R}$  могут выступать бесконечно дифференцируемые с компактными носителями функции. Когда изучаются периодические процессы, то роль пробных функций играют периодические бесконечно дифференцируемые функции. В нашем случае, в качестве пробных функции рассматриваем класс  $D(\mathcal{B}^\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(\mathcal{B}^m)$ , где  $D(\mathcal{B}^m)$  — область определения оператора  $\mathcal{B}^m$  при  $m \geq 1$ .

В следующей лемме решается вопрос о существовании пробных функции из  $D(\mathcal{B}^\infty)$ .

**Лемма 3.1.** *Если  $g \in D(\mathcal{B}^\infty)$ , то при всех  $f \in L_2(0, 1)$  свертка*

$$g * f \in D(\mathcal{B}^\infty).$$

**Доказательство леммы 3.1** следует из утверждения с) леммы 2.1.

Согласно лемме 3.1 достаточно построить одну функцию  $g \in D(\mathcal{B}^\infty)$ , чтобы получить бесконечно много других из  $D(\mathcal{B}^\infty)$ . В качестве  $g$  могут выступать собственные и присоединенные функции оператора  $\mathcal{B}$ . Нам необходимо выбрать, может быть, конечный набор функции  $g_1, g_2, \dots$  из  $D(\mathcal{B}^\infty)$ , так, чтобы замыкание линейной оболочки  $\text{span} \{g_s * f : s = 1, 2, \dots, f \in L_2(0, 1)\}$  совпадало с  $D(\mathcal{B}^\infty)$ . Для определения замыкания надо ввести топологию в линейном пространстве  $D(\mathcal{B}^\infty)$ . Будем говорить, что последовательность функции  $y_j$  из  $D(\mathcal{B}^\infty)$  сходится в смысле топологии  $D(\mathcal{B}^\infty)$  к нулю при  $j \rightarrow \infty$ , если при всех  $m = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{B}^m y_j \rightrightarrows^{[0,1]} 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

где  $\rightrightarrows^{[0,1]}$  — означает равномерную на  $[0, 1]$  сходимость.

Введем обозначение  $C_B^\infty[0, 1] := D(\mathcal{B}^\infty)$ . На самом деле функции из  $C_B^\infty[0, 1]$  определены лишь на интервале  $[0, 1]$ . В дальнейшем, функции  $C_B^\infty[0, 1]$  продолжим непрерывным образом на всю ось.

Для начала, продолжим функции из  $C_B^\infty[0, 1]$  на  $[-1, 0)$ . С учетом выполнения краевого условия  $y(0) = 0$ , продолжим эту функцию нечетным образом, т.е.

$$y(0 - x) = -y(0 + x), \quad x \in (0, 1]$$

или

$$y(x) = -y(-x), \quad x \in [-1, 0).$$

Теперь индуктивно определим функцию  $y$  на  $I_n = (n, n + 1]$  следующим образом:

$$y(x) = 2y(x - 1) - y(x - 2), \quad x \in I_n.$$

**Определение 3.1.** Дуальное пространство к  $C_B^\infty[0, 1]$  пространство  $\mathcal{D}'_B(0, 1) := \mathcal{L}(C_B^\infty[0, 1], \mathbb{C})$  называется пространством  $\mathcal{B}$ -распределений. Для  $u \in \mathcal{D}'_B(0, 1)$  и  $\varphi \in C_B^\infty[0, 1]$  запишем

$$u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle.$$

Для любых  $\psi \in C_B^\infty[0, 1]$  соответствие

$$\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

является  $\mathcal{B}$ -распределением, что влечет вложение  $\psi \in C_B^\infty[0, 1] \subset \mathcal{D}'_B(0, 1)$ .

**Определение 3.2.** Через  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  обозначим пространство быстро убывающих функций, действующих из  $\mathbb{Z}_+$  на  $\mathbb{C}$ . То есть,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , если для произвольного  $M < \infty$  существует некоторая константа  $C_{\varphi, M}$  так, чтобы имела место оценка

$$|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi, M} \langle \xi \rangle^{-M}$$

для всех  $\xi \in \mathbb{Z}_+$ , где

$$\langle \xi \rangle := (1 + \sqrt{\lambda_\xi}).$$

Топология на  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  задается полунормами  $p_k$ , где  $k \in \mathbb{Z}_+$  и  $p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \langle \xi \rangle^k |\varphi(\xi)|$ .

*Замечание 3.1.* Линейные непрерывные функционалы на  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  имеют следующий вид

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} u(\xi) \varphi(\xi),$$

где функции  $u : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  растут полиномиально на бесконечности, то есть существуют такие константы  $M < \infty$  и  $C_{u, M}$ , что неравенство

$$|u(\xi)| \leq C_{u, M} \langle \xi \rangle^M$$

справедливо для всех  $\xi \in \mathbb{Z}_+$ . Такие распределения  $u : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  составляют пространство  $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$ .

**Определение 3.3.** Для  $f \in C_B^\infty[0, 1]$  введем  $\mathcal{B}$ -Фурье преобразование по формуле

$$\widehat{f}(\xi) := (\mathcal{F}_B f)(\xi) = \int_0^1 f(x) v_\xi(x) dx. \quad (3.1)$$

Аналогично, для  $f \in C_{B^*}^\infty[0, 1]$  введем  $\mathcal{B}^*$ -Фурье преобразование по формуле

$$\widehat{f}^*(\xi) := (\mathcal{F}_{B^*} f)(\xi) = \int_0^1 f(x) u_\xi(x) dx. \quad (3.2)$$

**Лемма 3.2.**  $\mathcal{F}_B$  является непрерывной биекцией

$$(\mathcal{F}_B f)(\xi) = (f \mapsto \widehat{f}(\xi)) : C_B^\infty[0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+),$$

и обратное преобразование  $\mathcal{F}_B^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow C_B^\infty[0, 1]$  задается формулой

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi) u_\xi(x). \quad (3.3)$$

Аналогично,  $\mathcal{F}_{B^*}$  является непрерывной биекцией

$$(\mathcal{F}_{B^*} f)(\xi) = (f \mapsto \widehat{f^*}(\xi)) : C_{B^*}^\infty[0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$$

и обратное преобразование  $\mathcal{F}_{B^*}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow C_{B^*}^\infty[0, 1]$  задается формулой

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f^*}(\xi) v_\xi(x). \quad (3.4)$$

**Доказательство леммы 3.2** сильно не отличается от доказательства классического периодического случая, кроме тех моментов, где существенно используются свойства биортогональности. Покажем сперва, что для  $f \in C_B^\infty[0, 1]$  справедливо  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ , то есть для каждого  $M < \infty$  найдется такая постоянная  $C$ , что оценка

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{-M}$$

имеет место для всех  $\xi \in \mathbb{Z}_+$ . На самом деле, для произвольного  $M \in \mathbb{N}$  и  $\xi$  четного, получим неравенство

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_0^1 f(x) v_\xi(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f(x) \frac{(\mathcal{B}^*)^M v_\xi(x)}{\lambda_\xi^M} dx \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\lambda_\xi^M} \int_0^1 \mathcal{B}^M f(x) v_\xi(x) dx \right| \leq C \|\mathcal{B}^M f\|_{L_2(0,1)} \langle \xi \rangle^{-2M}. \end{aligned}$$

Такая же оценка верна и при  $\xi$  нечетном случае. Таким образом, для  $f \in C_B^\infty[0, 1]$  имеем  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ . В силу того, что  $\|\mathcal{B}^M f\|_{L_2(0,1)}$  задают полунормы в пространстве  $f C_B^\infty[0, 1]$ , то отсюда также следует непрерывность оператора  $\mathcal{F}_B$  из  $C_B^\infty[0, 1]$  в  $\mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$ .

Ясно, что для  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+)$  формула (3.3) определяет функцию  $\mathcal{F}_B^{-1} h \in C_B^\infty[0, 1]$  с коэффициентом Фурье  $h(\xi)$ . Если две функции  $f_1, f_2 \in C_B^\infty[0, 1]$  имеют одинаковые коэффициенты Фурье  $\widehat{f}_1(\xi) = \widehat{f}_2(\xi)$  для всех  $\xi \in \mathbb{Z}_+$ , то так как линейная оболочка  $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}_+}$  плотна в  $C_B^\infty[0, 1]$ , получим

$$f_1(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}_1(\xi) u_\xi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}_2(\xi) u_\xi(x) = f_2(x).$$

Непрерывность отображения  $\mathcal{F}_B^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow C_B^\infty[0, 1]$  выводится такими же рассуждениями. Свойства сопряженного преобразования  $\mathcal{F}_{B^*}$  доказываются аналогичным образом. Лемма доказана.

По обратному  $\mathcal{B}$ -Фурье преобразованию  $\mathcal{F}_B^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+) \rightarrow C_B^\infty[0, 1]$  расширим  $\mathcal{B}$ -Фурье преобразование единственным образом до отображения

$$\mathcal{F}_B : \mathcal{D}'_B(0, 1) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$$

по формуле

$$\langle \mathcal{F}_B w, \varphi \rangle := \langle w, \overline{\mathcal{F}_{B^*}^{-1} \varphi} \rangle, \quad \text{для } w \in \mathcal{D}'_B(0, 1), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}_+). \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что если  $w \in \mathcal{D}'_B(0, 1)$ , то  $\widehat{w} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+)$ . Также заметим, что если  $w \in C_B^\infty[0, 1]$ , то тождество

$$\begin{aligned} \langle \widehat{w}, \varphi \rangle &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{w}(\xi) \varphi(\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \left( \int_0^1 w(x) \overline{v_\xi(x)} dx \right) \varphi(\xi) = \\ &= \int_0^1 w(x) \overline{\left( \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \overline{\varphi(\xi)} v_\xi(x) \right)} dx = \int_0^1 w(x) \overline{(\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}^{-1} \overline{\varphi})} dx = \langle w, \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*}^{-1} \overline{\varphi}} \rangle \end{aligned}$$

имеет место.

Аналогично определим отображение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}^*} : \mathcal{D}'_{\mathcal{B}^*}(0, 1) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}_+).$$

Теперь в пространстве последовательностей  $X = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$  введем внутреннюю свертку Коши, где индексы  $m_k$  из леммы 1.1:  $m_0 = 1$  и  $m_i = 2$ ,  $i \geq 1$ . Пусть  $\xi = \{\xi_0; \xi_{2k-1}, \xi_{2k}, k > 0\}$  и  $\eta = \{\eta_0; \eta_{2k-1}, \eta_{2k}, k > 0\}$  элементы  $X = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}^{m_k}$ , тогда их сверткой назовем последовательность  $\theta = \{\theta_0; \theta_{2k-1}, \theta_{2k}, k > 0\}$ , где

$$\theta_0 = \xi_0 \eta_0,$$

$$\theta_{2k-1} = \xi_{2k-1} \eta_{2k} + \xi_{2k} \eta_{2k} + \xi_{2k} \eta_{2k-1},$$

$$\theta_{2k} = \xi_{2k} \eta_{2k}.$$

Полученную таким образом свертку будем обозначать через  $\xi *_X \eta := \theta$ . Введенные свертки  $*_X$  и  $*$  связаны между собой через преобразование Фурье.

**Теорема 3.1.** Для любых двух элементов  $f, g \in C_B^\infty[0, 1]$  справедливо равенство

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} *_X \widehat{g}.$$

**Доказательство.** Записав свертку в следующем виде, и учитывая полученные тождества (2.4)-(2.11) и леммы 2.3 – 2.5, вычислим

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \sum_{\xi=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_\xi} \widehat{f}(2\xi - k) u_{2\xi-k}(x) * \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_\eta} \widehat{g}(2\eta - s) u_{2\eta-s}(x) = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{f}(0) \widehat{g}(0) u_0(x) - \\ &- \frac{1}{4} \sum_{\xi=1}^{\infty} \left[ (\widehat{f}(2\xi - 1) \widehat{g}(2\xi) + \widehat{f}(2\xi) \widehat{g}(2\xi) + \widehat{f}(2\xi) \widehat{g}(2\xi - 1)) u_{2\xi-1}(x) + \widehat{f}(2\xi) \widehat{g}(2\xi) u_{2\xi}(x) \right]. \end{aligned}$$

После преобразования Фурье получим требуемое тождество.

Теорема 3.1 доказана полностью.

Введем пространство последовательностей  $\mathcal{Bl}_2$ , порожденное системами функций  $\{u_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$  и  $\{v_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$  со скалярным произведением

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathcal{Bl}_2} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}^*(\xi)}. \quad (3.6)$$

Не сложно убедиться, что пространство  $\mathcal{Bl}_2$  является гильбертовым. На самом деле

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathcal{Bl}_2} = (\widehat{f}, \widehat{g}^*)_{l_2}.$$

Более того,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathcal{Bl}_2} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}^*(\xi)} = \widehat{f}(0) \overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^2 \widehat{f}(2(\xi - 1) + i) \overline{\widehat{g}^*(2(\xi - 1) + i)} =$$

$$= \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi \in \mathbb{N}} \sum_{\eta \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^2 \widehat{f}(2(\xi-1)+i)\overline{\widehat{g}^*(2(\eta-1)+i)}(u_{2(\xi-1)+i}, v_{2(\eta-1)+i})_{L_2} = (f, g)_{L_2}.$$

Таким образом,

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\mathcal{Bl}_2} = (f, g)_{L_2}.$$

Аксиомы гильбертового пространства следуют из полученного равенства. Тем самым, справедливо тождество Планшереля:

**Лемма 3.3.** (Тождество Планшереля) Если  $f \in L_2(0, 1)$ , тогда  $\widehat{f} \in \mathcal{Bl}_2$  и

$$\|f\|_{L_2} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{Bl}_2}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Непосредственными вычислениями

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2}^2 &= (f, f)_{L_2} = \left( \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi)u_\xi, \sum_{\eta \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}^*(\eta)v_\eta \right)_{L_2} = \\ &= \widehat{f}(0)\overline{\widehat{g}^*(0)} + \sum_{\xi \in \mathbb{N}} \sum_{\eta \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^2 \widehat{f}(2(\xi-1)+i)\overline{\widehat{g}^*(2(\eta-1)+i)}(u_{2(\xi-1)+i}, v_{2(\eta-1)+i})_{L_2} = \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}^*(\xi)} = (\widehat{f}, \widehat{f})_{\mathcal{Bl}_2} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{Bl}_2}^2 \end{aligned}$$

получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

В следующем определении введем пространство Соболева, порожденное оператором  $\mathcal{B}$ :

**Определение 3.4.** (Соболевские пространства  $\mathcal{BW}^s[0, 1]$ ) Для  $f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(0, 1)$  и числа  $s \in \mathbb{R}$  определим норму  $\|\cdot\|_{\mathcal{BW}^s[0, 1]}$  по формуле

$$\|f\|_{\mathcal{BW}^s[0, 1]} := \left( \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}^*(\xi)} \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Пространство Соболева  $\mathcal{BW}^s[0, 1]$  является пространством  $\mathcal{B}$ -распределений  $f$ , для которых  $\|f\|_{\mathcal{BW}^s[0, 1]} < \infty$ . Или, для  $f \in L_2(0, 1)$ :  $f \in \mathcal{BW}^s[0, 1]$  тогда и только тогда  $\langle \xi \rangle^s \widehat{f}(\xi) \in \mathcal{Bl}_2$ .

**Лемма 3.4.** Для каждого  $s \in \mathbb{R}$  пространство Соболева  $\mathcal{BW}^s[0, 1]$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{BW}^s} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}^*(\xi)}.$$

**Доказательство.** Пространства  $\mathcal{BW}^0[0, 1]$  и  $\mathcal{BW}^s[0, 1]$  являются изометрично изоморфными по каноническому изоморфизму  $\varphi_s : \mathcal{BW}^0[0, 1] \rightarrow \mathcal{BW}^s[0, 1]$ , определенному по формуле

$$\varphi_s f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+} \langle \xi \rangle^{-s} \widehat{f}(\xi) u_\xi(x).$$

На самом деле,  $\varphi_s$  является линейной изометрией между  $\mathcal{BW}^t[0, 1]$  и  $\mathcal{BW}^{t+s}[0, 1]$  для каждой  $s \in \mathbb{R}$ , и верны формулы  $\varphi_{s_1} \varphi_{s_2} = \varphi_{s_1+s_2}$  и  $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$ . Тем самым, полнота пространства  $L_2(0, 1) = \mathcal{BW}^0[0, 1]$  переводится на пространство  $\mathcal{BW}^s[0, 1]$  для каждого  $s \in \mathbb{R}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кангужин Б.Е., Гани С.Н. *Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке* // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2004. №1. С. 29–33.
2. Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б. *Нелокальные внутренние краевые задачи дифференциальных операторов и некоторые конструкции связанные с ними* // Математический журнал. 2012. Т. 12. №3. С. 92–100.
3. B. Kanguzhin and N. Tokmagambetov *The Fourier transform and convolutions generated by a differential operator with boundary condition on a segment* // Fourier Analysis: Trends in Mathematics. 2014. P. 235–251. Birkhäuser Basel AG, Basel.
4. B. Kanguzhin, N. Tokmagambetov, K. Tulenov *Pseudo-differential operators generated by a non-local boundary value problem* // Complex Var. Elliptic Equ. 2015. V. 60. №1. P. 107–117.
5. M. Ruzhansky, N. Tokmagambetov, *Nonharmonic analysis of boundary value problems* // International Mathematics Research Notices. 2015. P. 1–68. <http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnv243>.
6. Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. С. 294–304.
7. Седлецкий А.М. *Биортогональные разложения функций в ряд экспонент на интервалах вещественной оси* // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. №5. С. 51–95.
8. A. M. Sedletskii *Nonharmonic analysis* // J. Math. Sci. (N. Y.). 2003. №5. P. 3551–3619.
9. Седлецкий А.М. *Негармонический анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 96. С. 106–211.

Балтабек Есматович Кангужин,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
пр. аль-Фараби, 71,  
050040, г. Алматы, Казахстан  
E-mail: kanbalta@mail.ru

Нияз Есенжолович Токмагамбетов,  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
пр. аль-Фараби, 71,  
050040, г. Алматы, Казахстан  
E-mail: niyaz.tokmagambetov@gmail.com