

О РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$

Г.Л. АЛФИМОВ, М.Е. ЛЕБЕДЕВ

Аннотация. Работа посвящена исследованию решений уравнения $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$. Уравнения такого рода используются для описания стационарных мод в моделях конденсата Бозе-Эйнштейна. Известно, что при некоторых условиях на $P(x)$ и $Q(x)$, “большая часть” решений уравнений такого типа оказывается сингулярными, т.е. уходящими на бесконечность в конечной точке числовой прямой. В некоторых ситуациях это обстоятельство позволяет эффективно использовать методы символической динамики для изучения не сингулярных решений этого уравнения. В настоящей статье (i) устанавливаются достаточные условия для существования сингулярных решений этого уравнения, а также достаточные условия для их полного отсутствия; (ii) приводятся результаты численного исследования не сингулярных решений для случая, когда $Q(x)$ является константой, а $P(x)$ является знакопеременной периодической функцией. На основании этих результатов выдвигается предположение, что все не сингулярные решения в этом случае могут быть кодированы бесконечными последовательностями из символов алфавита, состоящего из счетного числа символов.

Ключевые слова: Уравнения с периодическими коэффициентами, нелинейное уравнение Шредингера, стационарные моды.

Mathematics Subject Classification: 34L30, 34C11, 35Q55, 37B10

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 90-х гг. прошлого столетия, нелинейное уравнение Шредингера с дополнительной пространственной неавтономностью продолжает оставаться объектом пристального изучения. Интерес к этому классу уравнений во многом обусловлен успехами в исследовании конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК). БЭК - это состояние вещества, возникающее при сверхнизких температурах, существование которого было предсказано в 20-е г. XX в. В 1995 г. БЭК был получен экспериментально [1], при этом оказалось, что динамика БЭК хорошо описывается уравнением шредингеровского типа с неавтономностью в виде дополнительного внешнего потенциала (в контексте теории БЭК, *уравнение Гросса-Питаевского*). В пространственно одномерном случае (“сигарообразный” конденсат) уравнение Гросса-Питаевского имеет вид

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + U(x)\Psi - P(x)|\Psi|^2\Psi. \quad (1)$$

Здесь $\Psi(x, t)$ — макроскопическая волновая функция конденсата, $U(x)$ соответствует потенциалу ловушки, удерживающей конденсат, а $P(x)$ описывает характерную длину межатомных взаимодействий. Используя явление так называемого резонанса Фешбаха, эта длина в эксперименте может быть сделана переменной, в частности, изменяющейся периодически в пространстве [2]. В этом случае говорят о взаимодействии конденсата с *нелинейной решеткой* (детали можно найти в обзоре [3]). Стоит отметить, что $P(x)$ может

G.L. ALFIMOV, M.E. LEBEDEV, ON REGULAR AND SINGULAR SOLUTIONS
FOR EQUATION $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$.

© Алфимов Г.Л., Лебедев М.Е., 2015 г.

Поступила 22 марта 2015 г.

быть как знакопостоянной, так и знакопеременной функцией. Особое внимание в литературе уделялось двум модельным случаям: $P(x) \equiv 1$ (случай межатомного притяжения) и $P(x) \equiv -1$ (случай межатомного отталкивания).

Потенциал $U(x)$ в случае оптической ловушки также моделируется периодической функцией. В этом случае говорят о *линейной решетке*, удерживающей конденсат. Обсуждение физических принципов удержания конденсата при помощи лазерного излучения можно найти в работе [4], а обзор результатов об уравнении Гросса-Питаевского с периодическим (линейным) потенциалом - в работе [5].

При исследовании задач, связанных с БЭК, важную роль играют так называемые *стационарные моды*. Им соответствуют решения вида $\Psi(x, t) = e^{-i\omega t}u(x)$. Если $u(x)$ — действительная функция, она удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0, \quad (2)$$

где $Q(x) = \omega - U(x)$. Естественным с физической точки зрения является *условие локализации* стационарной моды

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0. \quad (3)$$

Вместе с тем в литературе рассматриваются и другие типы стационарных мод, в частности, пространственно периодические и квазипериодические структуры.

Таким образом, для описания множества стационарных мод необходимо детальное исследование множества решений уравнения (2). Попытка такого исследования в случае, когда $P(x) \equiv -1$ (отталкивающие межатомные взаимодействия) и $Q(x)$ — ограниченная периодическая функция, была сделана в [6]. Основная идея работы [6] заключалась в том, что “большая часть” решений уравнения (2) уходит на бесконечность в некоторой (конечной) точке числовой прямой. Далее, оказалось, что множество “оставшихся” решений, определенных на всей числовой прямой, при некоторых условиях можно полностью описать, используя методы символической динамики. Более точно, эти решения могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с бесконечными в обе стороны последовательностями из символов некоторого конечного алфавита (*кодами* решений). Из этого множества кодов можно выделить коды, соответствующие локализованным или периодическим модам. В работе [6] был проведен детальный анализ случая

$$Q(x) = \omega - A \cos 2x,$$

и была указана область на плоскости параметров (ω, A) , где все определенные на всей числовой прямой решения можно закодировать бесконечными последовательностями из символов “0”, “+”, “-”. Локализованным модам при этом соответствуют коды, которые содержат лишь конечное число ненулевых символов.

Обобщение результатов работы [6] на случай $P(x) \neq \text{const}$ представляется интересной и актуальной задачей. Ключевую роль при этом играет исследование множества решений (2), уходящих на бесконечность в конечной точке числовой оси, и, дополнительного к нему, множества решений, продолжающихся на всю числовую ось. В частности, предположив, что $Q(x)$ — ограниченная периодическая функция, можно поставить следующие вопросы:

А. Возможно ли применение методов работы [6] при $P(x) \equiv 1$? В частности, имеются ли при $P(x) \equiv 1$ решения уравнения (2), уходящие на бесконечность в некоторой конечной точке числовой прямой?

В. Какие условия необходимо наложить на функции $P(x)$ и $Q(x)$, чтобы уравнение (2) допускало решения, уходящие на бесконечность в некоторой конечной точке числовой прямой $x = x_0$? Возможно ли развитие методов работы [6] в случае, когда $P(x)$ не является постоянной?

В настоящей работе представлены частичные ответы на вопросы А и В. Что касается вопроса А, отрицательный ответ на него дает предложение 1: при любой ограниченной снизу функции $Q(x)$, имеющей также ограниченную производную, и любой строго положительной функции $P(x)$ все решения уравнения (2) продолжаются на всю числовую прямую. Далее, частичный ответ на вопрос В содержится в предложениях 2 и 3. В частности, предложение 2 гласит, что если $P(x)$ отрицательна хотя бы в одной точке числовой прямой $x = x_0$, уравнение (2) имеет C^1 -гладкое *однопараметрическое семейство решений, уходящих на бесконечность в этой точке*. Более того, в соответствии с предложением 3, если $Q(x) \leq Q_0 < 0$ и $P(x) \leq P_0 < 0$, то ни одно из решений уравнения (2), кроме нулевого, не продолжается на всю числовую ось. Если $P(x)$ и $Q(x)$ периодические функции с единым периодом, причем $P(x)$ знакопеременна, то построение классификации стационарных мод, аналогичной [6], по всей видимости, возможно. В параграфе 4 рассматривается случай, когда $Q(x)$ постоянна, а $P(x)$ является π -периодической и меняет знак. Проведенное численное исследование позволяет предположить, что в этом случае возможно обобщение метода работы [6], причем для кодировки возможных стационарных мод требуется алфавит из бесконечного числа символов.

Для дальнейшего условимся о следующей терминологии. Решение $u(x)$ уравнения (2) будем называть *сингулярным*, если для некоторой конечной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \infty.$$

При этом мы будем говорить, что решение $u(x)$ *коллапсирует* в точке x_0 . Соответственно, решение $u(x)$ уравнения (2), не коллапсирующее ни в какой точке \mathbb{R} , будет называться *несингулярным* или *регулярным*.

2. СЛУЧАЙ $P(x) \geq P_0 > 0$: ОТСУТСТВИЕ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ

Частичный ответ на вопрос А дается следующим утверждением:

Предложение 1. Пусть для всех $x \in \mathbb{R}$, функции $Q(x), P(x) \in C^1(\mathbb{R})$, причем

а) $P(x) \geq P_0 > 0, |P'(x)| \leq \tilde{P}$;

б) $Q(x) \geq Q_0, |Q'(x)| \leq \tilde{Q}$.

Тогда решение задачи Коши для уравнения (2) с произвольными начальными условиями $u(x_0) = u_0, u_x(x_0) = u'_0$ может быть продолжено на всю действительную ось \mathbb{R} .

Доказательство. По теореме существования решений для ОДУ, существует такой интервал $[x_0, x_1)$, что решение задачи Коши $u(x)$ уравнения (2) с начальными условиями $u(x_0) = u_0, u_x(x_0) = u'_0$ на нем существует, единственно и $u(x) \in C^2[x_0; x_1)$. Предположим, что $[x_0; x_1)$ – это максимальный интервал существования решения, т.е. решение задачи Коши не может быть продолжено за точку $x = x_1$. Умножив исходное уравнение на $4u_x$ и проинтегрировав в пределах $[x_0; x)$, $x < x_1$, получим:

$$\begin{aligned} 2u_x^2(x) + 2Q(x)u^2(x) - 2 \int_{x_0}^x Q'(\xi)u^2(\xi)d\xi + P(x)u^4(x) - \int_{x_0}^x P'(\xi)u^4(\xi)d\xi = \\ = 2(u'_0)^2 + 2Q(x_0)u_0^2 + P(x_0)u_0^4 \equiv C. \end{aligned} \quad (4)$$

Отбрасывая $u_x^2(x) \geq 0$ в левой части равенства, а также пользуясь ограниченностью снизу функций $Q(x)$ и $P(x)$, приходим к неравенству:

$$2Q_0u^2(x) + P_0u^4(x) \leq C + 2 \int_{x_0}^x Q'(\xi)u^2(\xi)d\xi + \int_{x_0}^x P'(\xi)u^4(\xi)d\xi. \quad (5)$$

Производные $Q'(\xi)$ и $P'(\xi)$ заменим их оценками сверху: $Q'(\xi) \leq \tilde{Q}$, $P'(\xi) \leq \tilde{P}$, где $\tilde{Q} \geq 0$, $\tilde{P} \geq 0$. Умножив обе части неравенства на $P_0 > 0$, получим, что

$$2Q_0P_0u^2(x) + P_0^2u^4(x) \leq P_0C + 2P_0\tilde{Q} \int_{x_0}^x u^2(\xi)d\xi + P_0\tilde{P} \int_{x_0}^x u^4(\xi)d\xi.$$

Обозначим $v(x) = (P_0u^2(x) + Q_0)^2$, $v(x) \geq 0$. Тогда

$$v(x) \leq \tilde{C} + \frac{\tilde{P}}{P_0} \int_{x_0}^x w(v(\xi)) d\xi. \quad (6)$$

Здесь $\tilde{C} = P_0C + Q_0^2 \geq 0$, $\alpha = 2\tilde{Q}P_0/\tilde{P} \geq 0$, а $w(v)$ определяется формулой

$$w(v) \equiv \alpha(\sqrt{v} - Q_0) + (\sqrt{v} - Q_0)^2.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(s) = \int_{s_0}^s \frac{dv}{w(v)}. \quad (7)$$

Здесь $s_0 > Q_0^2$ – произвольная постоянная, $s \geq s_0$. Так как $w(v)$ положительна и монотонно возрастает, а интеграл

$$\int_{s_0}^{+\infty} \frac{dv}{w(v)}$$

расходится, функция $G(s)$ является положительной, монотонно возрастающей и неограниченной. Это означает, что обратная функция $G^{-1}(r)$ определена при $r \geq 0$, монотонно возрастает и неограничена. Сказанное позволяет применить к (6) неравенство Бихари, [7], теорема 2.3.1,

$$v(x) \leq G^{-1} \left(G(\tilde{C}) + \frac{\tilde{P}}{P_0} \int_{x_0}^x d\xi \right) = G^{-1} \left(G(\tilde{C}) + \frac{\tilde{P}}{P_0}(x - x_0) \right) < \infty. \quad (8)$$

Неравенство (8) справедливо при всех $x \in [x_0; x_1]$. Из (8) следует ограниченность функции $v(x)$ на всем промежутке $[x_0; x_1]$

$$v(x) \leq M = G^{-1} \left(G(\tilde{C}) + \frac{\tilde{P}}{P_0}(x_1 - x_0) \right).$$

Заметим, что $\tilde{C} \geq Q_0^2$, причем $\tilde{C} = Q_0^2$ только при $u_0 = u'_0 = 0$. Это означает, что $G(s)$ определена при \tilde{C} для любого ненулевого решения $u(x)$. Из ограниченности $v(x)$ следует, что решение $u(x)$ также является ограниченным на всем промежутке $[x_0; x_1]$:

$$|u(x)| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{M} - Q_0}{P_0}}, \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (9)$$

Подставляя оценку (9) в равенство (4), получаем оценку сверху для производной $u_x(x)$, справедливую на полуинтервале $x \in [x_0; x_1]$. Поскольку функции $u(x)$ и $u_x(x)$ непрерывны и ограничены на $[x_0; x_1]$, значения $u(x_1)$ и $u_x(x_1)$ конечны. Следовательно, существует продолжение решения задачи Коши с начальными условиями $u(x_0)$, $u_x(x_0)$ на интервал, больший чем $[x_0; x_1]$, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, доказана возможность продолжения решения на всю полупрямую $x > x_0$. Для доказательства аналогичного факта для $x < x_0$ достаточно сделать замену $x \rightarrow -x$ и повторить вышеизложенные рассуждения. \square

Комментарий: Из доказательства предложения 1, в частности, следует, что если условия (а) и (б) выполняются не на всей числовой прямой, а только на некотором промежутке $[x_1; x_2]$, решение задачи Коши для уравнения (2) с произвольными начальными условиями не коллапсирует ни в какой точке промежутка $[x_1; x_2]$.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ, КОГДА $P(x)$ НЕ ЗНАКООПРЕДЕЛЕНА

3.1. Асимптотические разложения. Если $P(x)$ отрицательна хотя бы в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}$, формальные асимптотические разложения предсказывают существование *двух однопараметрических семейств решений* уравнения (2), коллапсирующих в этой точке.

Построим эти асимптотические разложения. Будем считать, что $P(x_0) = -1$ (выполнения этого условия можно добиться путем перенормировки независимой переменной), введем обозначение $\eta = x - x_0$ и предположим, что в окрестности точки $x = x_0$ справедливы разложения

$$Q(x) = Q_0 + Q_1\eta + Q_2\eta^2 + \dots, \quad P(x) = -1 + P_1\eta + P_2\eta^2 + \dots$$

Имеем

$$u_{\eta\eta} + (Q_0 + Q_1\eta + Q_2\eta^2 + \dots)u + (-1 + P_1\eta + P_2\eta^2 + \dots)u^3 = 0.$$

Коллапсирующие в точке $x = x_0$ решения этого уравнения удовлетворяют условию $u(\eta) \rightarrow \pm\infty$, $\eta \rightarrow 0$. Пусть η стремится к нулю *справа*, $\eta > 0$. Сделаем замены $v(\eta) = \eta u(\eta)$, $\eta = e^{-t}$. Получим

$$v_{tt} + 3v_t + 2v + e^{-2t}Q(t)v + P(t)v^3 = 0, \quad (10)$$

Главный член разложения определим, исходя из баланса членов $2v$ и $-v^3$. Соответственно, имеем

$$V_0(t) = \pm\sqrt{2}. \quad (11)$$

Найдем первую поправку к главному члену, $v(t) = \pm\sqrt{2} + V_1(t) + o(V_1(t))$. Подставляя последнее выражение в уравнение (10), учитывая разложения для функций $Q(t)$ и $P(t)$ и отбрасывая члены порядков, более высоких, чем e^{-t} , получаем

$$V_{1,tt} + 3V_{1,t} - 4V_1 = \mp 2\sqrt{2}e^{-t}, \quad (12)$$

откуда $V_1(t) = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$. Вторая, третья и четвертая поправки, V_n , $n = 2, 3, 4$, находятся аналогичным образом. Для каждой из них соответствующее уравнение принимает вид.

$$V_{n,tt} + 3V_{n,t} - 4V_n = C_n e^{-nt}. \quad (13)$$

Однако, если при $n = 2, 3$ решения уравнения (13) имеют вид $V_n \sim e^{-nt}$, то в случае $n = 4$ показатель экспоненты в правой части совпадает с одним из корней характеристического многочлена оператора, стоящего в левой части. В этом случае решение уравнения (13) необходимо выбрать в виде $Ce^{-4t} - A_3te^{-4t}$. Здесь постоянная C может быть выбрана произвольным образом, а A_3 однозначно определяется коэффициентами разложений для $P(x)$ и $Q(x)$. Если константа C фиксирована, на дальнейших шагах указанной процедуры соответствующие уравнения разрешаются однозначно. Отметим, что замена “+” на “-” в формуле (11) приводит к замене знаков на противоположные у всех коэффициентов A_n , $n = 0, 1, \dots$, что естественно, в силу инвариантности уравнения (2) относительно замены $u \rightarrow -u$. Получаем

$$\pm v(t) = \sqrt{2} + A_0e^{-t} + A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} + A_3 \cdot (-t) \cdot e^{-4t} + Ce^{-4t} + \dots$$

Явные выражения для $A_0 - A_3$ таковы:

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_1, \quad (14)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}P_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0 + \frac{2\sqrt{2}}{9}P_1^2; \quad (15)$$

$$A_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}P_2P_1 + \frac{7\sqrt{2}}{27}P_1^3 + \frac{\sqrt{2}}{6}Q_0V_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}P_3; \quad (16)$$

$$A_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6}Q_1P_1 - \frac{\sqrt{2}}{5}Q_2 - \frac{32\sqrt{2}}{45}P_2P_1^2 - \frac{3\sqrt{2}}{5}P_3P_1 - \frac{2\sqrt{2}}{15}P_2Q_0 - \\ -\frac{2\sqrt{2}}{15}Q_0P_1^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5}P_4 - \frac{28\sqrt{2}}{135}P_1^4 - \frac{4\sqrt{2}}{15}P_2^2. \quad (17)$$

В случае, когда $\eta \rightarrow 0$ слева, $\eta < 0$, для построения подобных разложений необходимо сделать замены $v(\eta) = \eta u(\eta)$, $\eta = -e^{-t}$. Формулы для коэффициентов A_n при этом получаются такими же, что и в случае $\eta > 0$.

Окончательно, для исходного решения $u(x)$ при $x \rightarrow x_0 \pm 0$ получаем

$$\pm u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} + A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 \ln |\eta| + C\eta^3 + A_4\eta^4 \ln |\eta| + \dots, \quad (18)$$

где $A_0 - A_3$ задаются формулами (14)-(17), а дальнейшие коэффициенты A_n , $n > 3$ выражаются через Q_n и P_n и произвольную константу C .

Суммируя сказанное, асимптотическое разложение (18) предсказывает существование двух однопараметрических семейств решений, коллапсирующих в точке x_0 . Эти семейства связаны между собой симметрией $u \rightarrow -u$. При $x \rightarrow x_0 - 0$ решения одного из этих семейств стремятся к $+\infty$, другого - к $-\infty$.

3.2. Существование однопараметрических семейств коллапсирующих решений. Возможность построения асимптотических разложений (18) еще не является доказательством существования однопараметрических семейств коллапсирующих в точке x_0 решений. Вместе с тем справедливо следующее строгое утверждение:

Предложение 2. Пусть Ω - некоторая окрестность точки x_0 , а $Q(x) \in C^2(\Omega)$ и $P(x) \in C^4(\Omega)$. Тогда существует два C^1 -гладких однопараметрических семейства решений уравнения (2), соответствующих разложениям (18), коллапсирующих в точке $x = x_0$ (при подходе слева, $x < x_0$) и связанных между собой симметрией $u \rightarrow -u$. Каждое из этих семейств можно параметризовать свободной переменной $C \in \mathbb{R}$ из разложения (18).

Доказательство. В силу условий предложения, справедливы равенства

$$Q(x) = Q_0 + Q_1\eta + Q_2\eta^2 + Q_3\eta^3 + \tilde{Q}(\eta)\eta^4 \\ P(x) = -1 + P_1\eta + P_2\eta^2 + P_3\eta^3 + P_4\eta^4 + \tilde{P}(\eta)\eta^5$$

где $\eta = x - x_0$ и $\tilde{Q}(\eta), \tilde{P}(\eta) \in C(\Omega)$. Для доказательства существования семейства, соответствующего знаку “+” в (18), сделаем замену

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} + A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 \ln(-\eta) + z(\eta)\eta^3,$$

где $z(\eta)$ - новая неизвестная функция. Коэффициенты A_0, A_1, A_2 и A_3 выбираются в соответствии с формулами (14)-(17), то есть, таким образом, чтобы обратились в нуль множители при степенях $\eta^{-2}, \eta^{-1}, \eta^0$ и η . Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе $A_k, k = 0, 1, 2, 3$ из уравнения (2) вытекает следующее уравнение для z

$$z_{\eta\eta} + \frac{6}{\eta}z_{\eta} + g(\eta, z) = 0, \tag{19}$$

где $g(\eta, z)$ - полином третьей степени относительно z и $g(\eta, z) \sim \frac{\ln(-\eta)}{\eta}$ при $\eta \rightarrow -0$ и фиксированном z . Замена $\eta = -e^{-t}$ переводит точку $\eta = 0$ в $t = +\infty$, а уравнение (19) в уравнение

$$z_{tt} - 5z_t - f(t, z) = 0, \tag{20}$$

причем $f(t, z) \sim te^{-t}$ при $t \rightarrow +\infty$. Условия на $f(t, z)$ позволяют применить к уравнению (20) лемму об ограниченных решениях из Приложения. Эта лемма утверждает, что все ограниченные при $t \rightarrow +\infty$ решения уравнения (20), при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к некоторой константе C , причем для любого значения $C \in \mathbb{R}$ существует единственное решение, которое к этой константе асимптотически приближается при $t \rightarrow +\infty$. Более того, эти решения образуют C^1 -гладкое семейство. Возвращаясь к уравнению (19) и, далее, к (2), получаем утверждение предложения. Существование второго семейства решений, соответствующего знаку “-” в (18), следует из инвариантности уравнения (2) относительно замены $u \rightarrow -u$. \square

Комментарий: Аналогичные однопараметрические семейства коллапсирующих решений существуют *справа* от точки $x = x_0$.

Множество несингулярных решений в случае, когда $P(x)$ отрицательна на некоторых промежутках числовой прямой, может быть устроено достаточно сложным образом. В работе [6] было установлено, что если $P(x) = -1$ и $Q(x)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, каждому несингулярному решению уравнения (2) можно поставить в соответствие бесконечную в обе стороны последовательность символов конечного алфавита, причем соответствие между множеством несингулярных решений и множеством символов является гомеоморфизмом. Результаты численного исследования для еще одного случая ($Q(x) \equiv \omega = \text{const}, P(x) = \alpha + \cos 2x$, причем $|\alpha| < 1$) приведены в разделе 4. Вместе с тем, в некоторых случаях структура множества несингулярных решений уравнения (2) оказывается тривиальной.

3.3. Случай $P(x) \leq P_0 < 0, Q(x) \leq Q_0 < 0$. Оказывается справедливым следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть при $x \in \mathbb{R}$ выполняются условия $P(x) \leq P_0 < 0, Q(x) \leq Q_0 < 0$. Тогда все решения уравнения (2) сингулярны, за исключением нулевого решения.

Прежде чем доказывать предложение 3, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Все решения уравнения

$$v_{xx} - qv - pv^3 = 0, \tag{21}$$

где $p, q > 0$ - постоянные, сингулярны за исключением нулевого решения.

Доказательство леммы 1. Решение задачи Коши для уравнения (21) с начальными условиями $v_0 = v(x_0)$, $v'_0 = v_x(x_0)$ может быть записано в неявном виде

$$\pm \int_{v_0}^v \frac{d\xi}{\sqrt{C + q\xi^2 + \frac{p}{2}\xi^4}} = x - x_0;$$

$$C \equiv (v'_0)^2 - qv_0^2 - \frac{p}{2}v_0^4$$

(выбор знака в левой части зависит от начальных условий и значения x). Интеграл в левой части равенства сходится при $v \rightarrow \infty$, а значит, существует такое значение x ,

$$x_{collapse} = x_0 + \int_{v_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{C + q\xi^2 + \frac{p}{2}\xi^4}},$$

при приближении к которому $v(x)$ стремится к бесконечности. \square

Доказательство предложения 3. Используем лемму о сравнении (Comparison Lemma) из [8], приложение С. Рассмотрим уравнение

$$v_{xx} + Q_0v + P_0v^3 = 0.$$

Введем обозначения

$$g(x, \xi) = -Q(x)\xi - P(x)\xi^3, \quad f(x, \xi) = f(\xi) = -Q_0\xi - P_0\xi^3.$$

Применим лемму сравнения к паре уравнений

$$u_{xx} = g(x, u); \tag{22}$$

$$v_{xx} = f(x, v). \tag{23}$$

В области $D_+ = \{x \in \mathbb{R}, \xi \in (0; +\infty)\}$ имеем $f(x, \xi) \leq g(x, \xi)$. Пусть $\tilde{u}(x)$ – решение задачи Коши для уравнения (22) с начальными условиями $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = u'_0$. Выберем начальные условия задачи Коши для уравнения (23): $v(x_0) = u(x_0) = u_0$, $v'(x_0) = u'(x_0) = u'_0$; $\tilde{v}(x)$ – ее решение. Пусть $u_0 > 0$, тогда возможны два случая:

(i) $u'_0 \geq 0$. Функция $\tilde{v}(x)$ монотонно возрастает (этот факт легко установить из фазового портрета уравнения (23)). Исходя из леммы о сравнении, решение $\tilde{u}(x)$ ограничивает сверху решение $\tilde{v}(x)$, которое, в свою очередь, сингулярно. Следовательно, решение $\tilde{u}(x)$ также является сингулярным.

(ii) $u'_0 < 0$. Сделаем замену $\tilde{x} = -x$. В этом случае решение $\tilde{v}(\tilde{x})$ также монотонно возрастает, а, исходя из леммы о сравнении, $\tilde{u}(\tilde{x})$ ограничивает его сверху, следовательно, является сингулярным.

Аналогично, в области $D_- = \{x \in \mathbb{R}, \xi \in (-\infty; 0)\}$ справедливо неравенство $f(x, \xi) \geq g(x, \xi)$. Путем аналогичных рассуждений устанавливается, что в области D_- решение $u(x)$ также будет сингулярным. \square

4. $P(x)$ и $Q(x)$ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ: ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВА НЕСИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ

4.1. Общая схема исследования и некоторые определения. Обратимся теперь к случаю, когда $P(x)$ π -периодична и принимает отрицательные значения хотя бы при некоторых значениях x . Введем некоторые определения.

Определение 1. Определим отображение Пуанкаре $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, порожденное уравнением (2), следующим образом [9]

$$T \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\pi) \\ u_x(\pi) \end{pmatrix},$$

где $u(x)$ – решение уравнения (2) с начальными условиями $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$.

Определение 2. Назовем *орбитой* последовательность точек (конечную или бесконечную) $\{p_n\} \in \mathbb{R}^2$, таких, что $Tp_n = p_{n+1}$.

Определение 3. Определим множества $\mathcal{U}_L^+ \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{U}_L^- \subset \mathbb{R}^2$, $L > 0$ следующим образом: $p = (u_0, u'_0) \in \mathcal{U}_L^+$ тогда и только тогда, когда решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$ не коллапсирует на промежутке $[0; L]$. Аналогично, $p = (u_0, u'_0) \in \mathcal{U}_L^-$ тогда и только тогда, когда решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными данными $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$ не коллапсирует на промежутке $[-L; 0]$.

Заметим, что отображение Пуанкаре T определено только на множестве \mathcal{U}_π^+ , а обратное к нему отображение T^{-1} – только на множестве \mathcal{U}_π^- , причем $T\mathcal{U}_\pi^+ = \mathcal{U}_\pi^-$. Рассмотрим последовательность множеств

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \mathcal{U}_\pi^+ \cap \mathcal{U}_\pi^-, \\ \Delta_{n+1}^+ &= T\Delta_n^+ \cap \Delta_0, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \Delta_{n+1}^- &= T^{-1}\Delta_n^- \cap \Delta_0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, Δ_0 состоит из точек, которые имеют и T -образ и T -прообраз. Кроме того, справедливы утверждения

$$\begin{aligned} \{p \in \Delta_n^+\} &\Leftrightarrow \{Tp, T^2p, \dots, T^n p \in \Delta_0\} \\ \{p \in \Delta_n^-\} &\Leftrightarrow \{T^{-1}p, T^{-2}p, \dots, T^{-n}p \in \Delta_0\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \dots \subset \Delta_{n+1}^+ \subset \Delta_n^+ \dots \subset \Delta_1^+ \subset \Delta_0 \\ \dots \subset \Delta_{n+1}^- \subset \Delta_n^- \dots \subset \Delta_1^- \subset \Delta_0. \end{aligned}$$

Определим множества

$$\Delta^+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n^+, \quad \Delta^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n^-.$$

Несингулярные решения уравнения (2) соответствуют начальным данным задачи Коши, принадлежащим множеству $\Delta = \Delta^+ \cap \Delta^-$. Это множество инвариантно относительно действия T . Описание множества Δ , а также действия отображения T на Δ позволяет полностью перечислить все несингулярные решения (2).

В работе [6] было показано, что если

- а) Множество Δ_0 состоит из конечного числа N компонент связности, $\Delta_0 = \bigcup_{k=1}^N D_k$, при этом каждая из компонент D_k является криволинейным четырехугольником, границы которого удовлетворяют специальным условиям гладкости и монотонности;
- б) Все множества $TD_k \cap D_m$ и $T^{-1}D_k \cap D_m$, $k, m = 1, \dots, N$, непусты, при этом действие T на кривые, лежащие в D_k , сохраняют надлежащим образом введенные свойства монотонности;
- в) площади Δ_n^\pm стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$;

то орбиты, порождаемые T на Δ , находятся во взаимно-однозначном соответствии с бесконечными в обе стороны последовательностями алфавита из N символов. Выберем в качестве символов числа $1, \dots, N$. Последовательности $\dots \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots$, где $\alpha_k \in \{1, \dots, N\}$ соответствует единственная орбита, для которой

$$\dots, T^{-1}p \in D_{\alpha_{-1}}, \quad p \in D_{\alpha_0}, \quad Tp \in D_{\alpha_1}, \dots$$

Работа [6] содержит строгие формулировки условий (а), (б) и (в). Их проверка в [6] осуществлялась численно для случая

$$Q(x) = \omega - A \cos 2x, \quad P(x) = -1$$

Ниже приведем результаты численных исследований для другого случая, когда $P(x)$ является знакопеременной функцией.

4.2. Случай, когда $P(x)$ — знакопеременная функция. Численное исследование. Рассмотрим модельный случай

$$Q(x) = \omega, \quad P(x) = \alpha + \cos 2x, \quad \alpha \in (-1, 1).$$

Уравнение (2) принимает вид

$$u_{xx} + \omega u + (\alpha + \cos 2x)u^3 = 0. \quad (24)$$

Ниже приводится краткая сводка результатов для этого случая, полученных при помощи численного счета. Приведенные утверждения не являются строгими и имеют характер *гипотез*. Более детальное изложение результатов численного исследования планируется представить позже.

Множества \mathcal{U}_π^\pm . Нахождение множеств \mathcal{U}_π^\pm производилось путем сканирования плоскости начальных данных (u, u_x) с некоторыми достаточно малыми шагами по u и u_x . Для каждой точки (u_0, u'_0) решалась задача Коши с начальными данными $u(0) = u_0$, $u_x(0) = u'_0$. Если решение на промежутке $[0; \pi]$ превосходило по модулю заданное большое значение u_{max} , то решение считалось коллапсирующим, если нет — полагалось, что точка (u_0, u'_0) принадлежит множеству \mathcal{U}_π^+ . В численных экспериментах первоначально полагалось $u_{max} = 10^5$, и результат проверялся при $u_{max} = 10^7$. Полученные при различных значениях u_{max} множества \mathcal{U}_π^+ хорошо согласовались между собой. Примеры множеств \mathcal{U}_π^\pm при различных параметрах ω и α представлены на рис.1. В силу обратимости уравнения (24), множества \mathcal{U}_π^- получаются из множеств \mathcal{U}_π^+ путем отражения относительно оси u . Результаты численного счета позволяют предположить, что множества \mathcal{U}_π^\pm представляют собой *спирали с бесконечным числом оборотов* вокруг начала координат.

Множество Δ_0 . Структура множества Δ_0 определяется геометрическими свойствами множеств \mathcal{U}_π^\pm . Если множества \mathcal{U}_π^\pm являются спиралями с бесконечным числом оборотов вокруг начала координат, Δ_0 состоит из бесконечного числа компонент связности. Эти компоненты располагаются вдоль осей u и u_x симметричным образом и могут быть пронумерованы индексами $\{A_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ (компоненты, лежащие вдоль оси u) и $\{B_k\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ (компоненты, лежащие вдоль оси u_x). В начале координат располагается еще одна компонента связности, обозначенная O , см. рис. 2. В отличие от случая, исследованного в [6], множество Δ_0 , по всей видимости, не является ограниченным. Это означает, что предположение (а) не выполняется, и, более того, это не позволяет провести численную проверку гипотез (б) и (в), подобно той, которая была проведена в [6].

Несмотря на это обстоятельство, используем для описания множества несингулярных решений общую идею работы [6]. Исходя из геометрических свойств спиралей \mathcal{U}_π^\pm , мы предполагаем, каждая из компонент связности A_k и B_k является криволинейным четырехугольником, границы которого удовлетворяют условиям гладкости и монотонности.

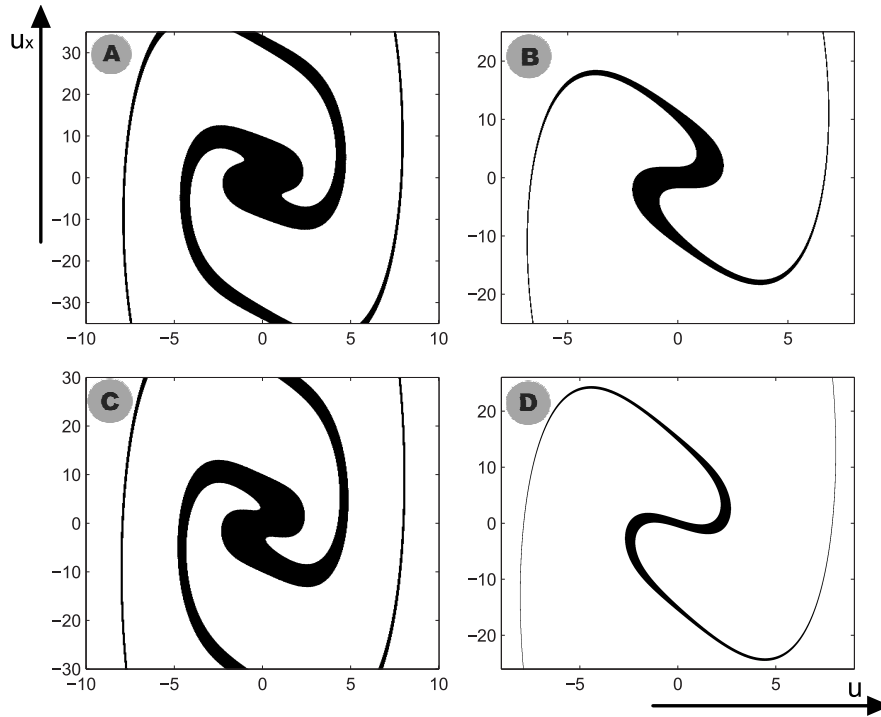


РИС. 1. Множества \mathcal{U}_π^+ : А) $\omega = 0.5$, $\alpha = 0.5$; В) $\omega = 1$, $\alpha = 0$; С) $\omega = -0.5$, $\alpha = 0.5$; D) $\omega = -1$, $\alpha = -0.1$.

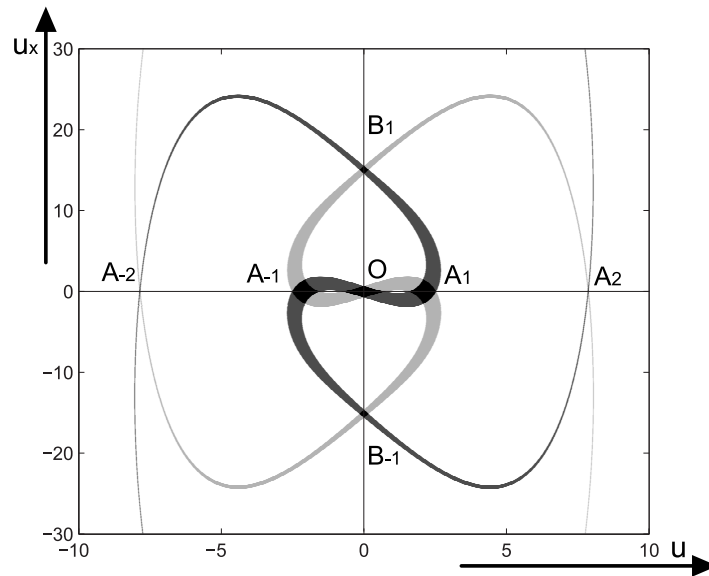


РИС. 2. Множества \mathcal{U}_π^+ (темно-серый цвет), \mathcal{U}_π^- (светло-серый цвет), а также их пересечение \mathcal{U}_π (черный цвет) для уравнения (24) с параметрами $\omega = 1$, $\alpha = -0.1$.

Вообще говоря, это не так для центральной компоненты O . Эта компонента не обязательно является криволинейным четырехугольником с монотонными границами, но может стать таковой при соответствующем выборе параметров ω и α , см. рис. 3.

Кодировка решений. Пусть все компоненты связности A_k , B_k и O являются криволинейными четырехугольниками. Тогда результаты численного счета позволяют предположить,

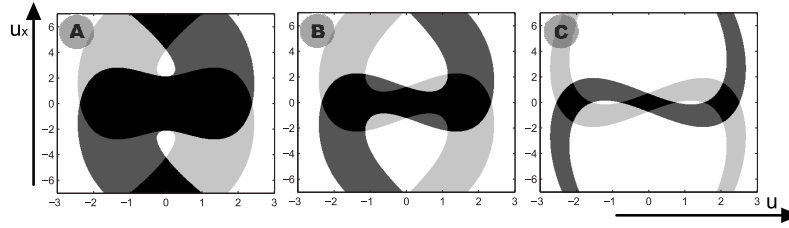


РИС. 3. Центральная компонента связности O при различных значениях параметров: А) $\omega = -1, \alpha = 0.5$; В) $\omega = -1, \alpha = 0.3$; С) $\omega = -1, \alpha = -0.1$;

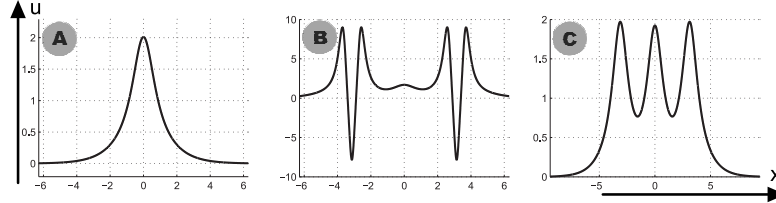


РИС. 4. Решения и их коды: А).. $OA_1O..$; В).. $OA_{-2}A_1A_{-2}O..$; С).. $OA_1A_1A_1O..$;

что, множества $T^{-1}A_k, T^{-1}B_k, k = 1, 2, \dots$, и $T^{-1}O$ представляют собой бесконечные криволинейные полосы, расположенные внутри \mathcal{U}_π^+ . Аналогично, $TA_k, TB_k, k = 1, 2, \dots$, и TO также представляют собой бесконечные криволинейные полосы, расположенные внутри \mathcal{U}_π^- . Далее, T -прообразами множеств

$$T^{-1}Z \cap A_l, \quad T^{-1}Z \cap B_l, \quad T^{-1}Z \cap O, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ Z \in \{O, A_k, B_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

являются бесконечные криволинейные полосы, лежащие в $T^{-1}Z$. Подобное утверждение справедливо и для T -образов множеств $TZ \cap A_l, TZ \cap B_l, TZ \cap O, l = \pm 1, \pm 2, \dots$, которые располагаются внутри $TZ, Z \in \{O, A_k, B_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Таким образом, динамика отображения T оказывается схожей с динамикой отображения Пуанкаре, описанной в работе [6].

В свете этого, по аналогии с [6], мы предполагаем, что все несингулярные решения уравнения (24) можно поставить во взаимно однозначное соответствие с бесконечными в обе стороны последовательностями символов вида $\{\dots Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots\}$, где $Z_m \in \{O, A_k, B_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$. При этом орбита, соответствующая коду $\{\dots Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots\}$, последовательно посещает компоненты связности $Z_m, m = \dots, -1, 0, 1, \dots$. На рис. 4 приведены несколько локализованных решений уравнения (24) и их коды.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования уравнения (2), описывающего стационарные моды для неавтономного нелинейного уравнения Шредингера. Основное внимание уделяется сингулярным (то есть уходящих на бесконечность в некоторой точке числовой прямой) решениям. Как показывает пример работы [6], если сингулярных решений оказывается “достаточно много”, то этот факт можно использовать для построения классификации стационарных мод для уравнения (1).

Результаты исследований удобно представить в виде таблицы (таб. 1). Помимо строгих утверждений, в работе представлены результаты численного исследования уравнения (2) в случае, когда $Q(x) \equiv \omega$ и $P(x) = \alpha + \cos 2x, -1 < \alpha < 1$. На основании этих результатов выдвинуто предположение, что в некотором диапазоне параметров α и ω все

P	Q	
$P(x) > 0$	—	Все решения продолжаются на действительную ось, сингулярные решения отсутствуют (предложение 1).
$P(x) < 0$ хотя бы в одной точке $x = x_0$	—	Имеется пара однопараметрических семейства решений, коллапсирующих в точке $x = x_0$ и связанных симметрией $u \rightarrow -u$ (предложение 2)
$P(x) < 0$	$Q(x) < 0$	Все решения сингулярны за исключением нулевого решения (предложение 3).
$P(x)$ знакопеременна	—	Возможны сложные классы несингулярных решений. Предположительно, при некоторых дополнительных ограничениях возможно кодирование несингулярных решений бесконечными в обе стороны последовательностями символов из некоторого алфавита (численное исследование, раздел 4).

ТАБЛИЦА 1. Сводная таблица результатов о наличии или отсутствии сингулярных решений уравнения (2) для периодических и достаточно гладких $P(x)$ и $Q(x)$

не сингулярные решения уравнения (2) могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие бесконечным в обе стороны последовательностям вида $\{\dots Z_{-1}, Z_0, Z_1, \dots\}$, где $Z_m \in \{O, A_k, B_k, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. К сожалению, строгие достаточные условия, которые нужно наложить на параметры ω и α , для такой кодировки к настоящему времени не известны.

Помимо вопроса о строгом обосновании такой кодировки решений, можно выделить еще некоторые интересные темы для дальнейших исследований. В частности, по нашему мнению, оценка решения уравнения (2), следующая из предложения 1, не является оптимальной. Возможно, при сделанных предположениях можно доказать ограниченность решений на всей числовой прямой. Еще один вопрос, важный для физических приложений, касается устойчивости стационарных мод, в рамках исходного эволюционного уравнения (1). На наш взгляд, представляет интерес исследование связи между устойчивостью или неустойчивостью той или иной стационарной моды и ее кодировкой. В частности, насколько авторам известно, систематическое исследование устойчивости стационарных мод, описываемых (24), не проводилось.

Авторы благодарны Д.А. Зезюлину, В.В. Конотопу и Б.И. Сулейманову за полезные обсуждения.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ: ЛЕММА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ

Лемма об ограниченных решениях. Пусть $f(t, z)$ — функция, непрерывная по t и непрерывно дифференцируемая по z , определенная для $t \geq t_0$ и $|z| < \infty$ и обладающая следующими свойствами:

(i) при $|z| < \rho$, $\rho > 0$, выполняется соотношение $|f(t, z)| < \eta_\rho(t)|z|$, причем $\eta_\rho(t) \in L_1(t_0; \infty)$;

(ii) для любых z_1 и z_2 , таких, что $|z_{1,2}| < \rho$, $\rho > 0$, существует функция $\tilde{\eta}_\rho(t) \in L_1(t_0; \infty)$, такая, что $|f(t, z_2) - f(t, z_1)| \leq \tilde{\eta}_\rho(t)|z_2 - z_1|$;

(iii) при $|z| < \rho$, $\rho > 0$, выполняется соотношение $|f_z(t, z)| < \theta_\rho(t)|z|$, причем $\theta_\rho(t) \in L_1(t_0; \infty)$;

(iv) для любых z_1 и z_2 , таких, что $|z_{1,2}| < \rho$, $\rho > 0$, существует функция $\tilde{\theta}_\rho(t) \in L_1(t_0; \infty)$, такая, что $|f_z(t, z_2) - f_z(t, z_1)| \leq \tilde{\theta}_\rho(t)|z_2 - z_1|$.

Тогда для уравнения

$$z_{tt} - \alpha z_t + f(t, z) = 0, \quad \alpha > 0 \quad (25)$$

справедливы следующие утверждения:

(А) для любого ограниченного при $t \rightarrow \infty$ решения $z(t)$ уравнения (25) существует $C \in \mathbb{R}$, такая, что $z(t) \rightarrow C$ при $t \rightarrow \infty$;

(В) для любого $C \in \mathbb{R}$ имеется единственное решение $Z(t; C)$ уравнения (25), определенное на промежутке (t_C, ∞) , такое, что

$$Z(t; C) = C + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty; \quad (26)$$

(С) семейство решений $Z(t; C)$ является C^1 -гладким по параметру C .

Доказательство леммы об ограниченных решениях: Докажем пункт (А). Используя метод вариации постоянной, получаем, что решение уравнения (25) удовлетворяет равенству

$$z(t) = \varkappa_1 + \varkappa_2 e^{\alpha t} + \int_{t_0}^t e^{\alpha \eta} \left(\int_{\eta}^{\infty} e^{-\alpha \xi} f(\xi, z(\xi)) d\xi \right) d\eta.$$

В силу условия (i), если $z(t)$ — ограничена при $t \rightarrow \infty$, то интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha \eta} \left(\int_{\eta}^{\infty} e^{-\alpha \xi} f(\xi, z(\xi)) d\xi \right) d\eta \quad (27)$$

сходится. Для ограниченных решений $\varkappa_2 = 0$, следовательно, $z(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремится к константе. Пункт (А) доказан.

Докажем пункт (В). Сделаем замену $u(t) = z(t) - C$, где C — произвольное число. Запишем уравнение (25) в виде системы

$$y_t = Ay + F(t, y), \quad (28)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, u + C) \end{pmatrix}.$$

Используем теорему 9.1 из главы XII монографии [10]. Она утверждает, что система (28) имеет решение, стремящееся к нулю на бесконечности, если выполнены следующие условия:

(1) функция $F(t, y)$ непрерывна, причем $\|F(t, y)\| \leq \lambda(t)$ при $t \in [t_0, \infty)$, $\|y\| \leq \rho$, где $\lambda(t) \in L_1(t_0, \infty)$;

(2) при всех $g(t) = \text{col}(g_1(t), g_2(t))$, $g(t) \in L_1(t_0; \infty)$ существует решение $y(t) \in L_0^\infty(t_0; \infty)$ неоднородной системы

$$y_t = Ay + g(t); \quad (29)$$

(здесь и далее под нормой понимается евклидова норма в \mathbb{R}^2).

Во-первых, в силу (i) при $|u| \leq \rho$ и $t > t_0$ имеет место соотношение $\|f(t, u, C)\| \leq \rho\eta_\rho(t)$, причем $\eta_\rho(t) \in L_1(t_0, \infty)$, следовательно, условие (1) теоремы выполняется. Во-вторых, общее решение неоднородной системы уравнений (29) имеет вид:

$$u(t) = C_2 + \int_{t_0}^t \left(g_1(\eta) + e^{\alpha\eta} \left(C_1 - \int_{\infty}^{\eta} e^{-\alpha\xi} g_2(\xi) d\xi \right) \right) d\eta;$$

$$v(t) = u_t(t) - g_1(t).$$

Так как $g_{1,2}(t) \in L_1[t_0; \infty)$, выбирая константы C_1, C_2 подходящим образом, можно получить решение, стремящееся к нулю, при $t \rightarrow \infty$, то есть выполняется условие (2). Таким образом, условия цитируемой теоремы для системы (28) выполнены. Это означает, что при любом значении C уравнение (25) имеет решение $z(t)$, стремящееся к C при $t \rightarrow \infty$.

Докажем, что это решение единственно. Пусть при одном и том же C имеются два решения уравнения

$$u_{tt} - \alpha u_t + f(t, u + C) = 0 \quad (30)$$

Тогда их разность $\Delta(t) = u_2(t) - u_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{tt} - \alpha \Delta_t + R(t)\Delta = 0 \quad (31)$$

и граничному условию $\Delta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Здесь

$$R(t) \equiv \frac{f(t, u_2(t) + C) - f(t, u_1(t) + C)}{u_2(t) - u_1(t)}.$$

В силу условия (ii) к уравнению (31) можно применить Теорему 11 из главы 3 монографии [11]. Она утверждает, что существует гомеоморфизм между ограниченными решениями уравнения (31) и уравнения

$$\Delta_{tt} - \alpha \Delta_t = 0 \quad (32)$$

причем (см. замечание после этой теоремы в [11]) в силу линейности возмущения, этот гомеоморфизм является линейным отображением. Это означает, что только нулевое решение (31) удовлетворяет нулевому асимптотическому условию на бесконечности, т.е. $u_2(t) \equiv u_1(t)$. Тем самым доказано существование семейства решений $Z(t; C)$, параметризуемого $C \in \mathbb{R}$, то есть пункт (B) также доказан.

Для доказательства пункта (C) заметим, что производная

$$\frac{\partial Z}{\partial C}(t, C) \equiv \Theta(t, C)$$

удовлетворяет уравнению (30), продифференцированному по C , причем $\Theta(t, C) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Имеем

$$\Theta_{tt} - \alpha \Theta_t + f_z(t, u + C)\Theta + f_z(t, u + C) = 0 \quad (33)$$

Вновь применяя теорему 11 из главы 3 монографии [11] и используя (iii), заключаем, что существует решение этого уравнения $\Theta(t, C)$, такое, что $\Theta(t, C) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, причем $\Theta(t, C)$ непрерывна по параметру C . Лемма доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М.Н. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, С.Е. Wieman, Е.А. Cornell *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor* // Science, (New Series). 1995. Vol. 269. P. 198–201.
2. М. Theis, G. Thalhammer, K. Winkler, M. Hellwig, G. Ruff, R. Grimm, and J. H. Denschlag *Tuning the scattering length with an optically induced Feshbach resonance* // Phys. Rev. Lett. 93, 123001, 2004.
3. Y.V. Kartashov, B.A. Malomed, L. Torner *Solitons in nonlinear lattices* // Rev.Mod.Phys. 2011. 83. P.247–305.
4. Пятаевский Л.П. *Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения* // УФН. 2006. Т. 176. С. 345–364.
5. V.A. Brazhnyi, V.V. Konotop *Theory of nonlinear matter waves in optical lattices* // Modern Phys. Lett. 2004. В 18. P. 627–651.
6. G.L. Alfimov, A.I. Avramenko *Coding of nonlinear states for the Gross-Pitaevskii equation with periodic potential* // Physica D. 2013. Vol. 254. P. 29–45.
7. B.G. Pachpatte *Inequalities for Differential and Integral Equation* // Mathematics in Science and Engineering. Volume 197. 1998.
8. G.L. Alfimov, D.A. Zezyulin *Nonlinear modes for the Gross – Pitaevskii equation – a demonstrative computational approach* // Nonlinearity 20. 2007. P. 2075–2092.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. *Нелинейные колебания*. М.: Физматлит. 2005.
10. P. Hartman *Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons. 1964.
11. W.A. Coppel *Stability and asymptotic behaviour of differential equations*. Boston: Heath and Co. 1965.

Георгий Леонидович Алфимов,
Национальный исследовательский университет МИЭТ,
4806-й пр., д. 5,
124498, г. Москва, Зеленоград, Россия
E-mail: galfimov@yahoo.com

Михаил Евгеньевич Лебедев,
Национальный исследовательский университет МИЭТ,
4806-й пр., д. 5,
124498, г. Москва, Зеленоград, Россия
E-mail: st_w@rambler.ru