ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 114-122.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Получены формулы, задающие все возможные движения сплошной среды без расхождения с линейным полем скоростей: либо с линейным по времени матрицей, либо матрица имеет постоянные сингулярные числа.

Ключевые слова: движение с нулевой дивергенцией, линейное поле скоростей, сингулярные числа матрицы.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35Q35

Введение

При классификации движений сплошной среды с линейным полем скоростей [1, 2] возникает особый случай движения без расхождения, когда дивергенция скорости равна нулю. Получается переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений и требуется изучить ее совместность. Для общего движения этому соответствует решения, например, уравнений сжимаемой жидкости с нулевой дивергенцией [3]

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0,$$

$$\rho_t + \vec{u}\cdot\nabla\rho = 0, \quad p_t + \vec{u}\cdot\nabla p = 0, \tag{0.1}$$

где $\vec{u}$, p и ρ – скорость, давление и плотность. Система (0.1) справедлива для любого уравнения состояния, из которого определяется энтропия. Переопределенная система (0.1) в пространственном случае не приведена в инволюцию и не известен произвол в решениях (как задавать начальные данные).

Физический смысл решений с нулевой дивергенцией состоит в следующем: для любого выделенного ограниченного объема сколько жидкости втекает в него столько же и вытекает из него.

Плоские движения без расхождения с линейным полем скоростей перечислены в[4]. В работе ставится задача найти все решения уравнений (0.1) с линейным полем скоростей в пространственном случае. Так же как и в плоском случае получаются решения либо с линейной по времени матрицей, либо матрица имеет постоянные сингулярные числа.

S.V. Khabirov, Space motions with the linear field of velocity without divergence.

Работа поддержана РФФИ(14-01-97027), Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (НШ-2133.2014.1), грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Поступила 16 мая 2014 г.

1. Эйлерово и лагранжево описание движения с линейным полем скоростей

Решения системы (0.1) с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t) \tag{1.1}$$

определяют эйлерову подмодель из переопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \mathrm{tr}A = 0, \quad A' + A^2 = B, \quad B' + A^T B + BA = 0, \\ \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{a}, \quad \vec{a}' + A^T\vec{a} + B\vec{u}_0 = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Лагранжевы переменные t, $\vec{\xi}$ вводятся как решение задачи

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{\xi}, \tag{1.3}$$

и задаются формулами

$$\vec{x} = \vec{x_0}(t) + M(t)\vec{\xi}, \quad M(t_0) = I, \quad \vec{x_0}(t_0) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь I – единичная матрица. Из равенств (1.3), (1.4) следуют выражения для матриц A, B и векторов $\vec{u_0}$, $\vec{a}$ через матрицу M и вектор $\vec{x_0}$:

$$\begin{gathered} A = M'M^{-1}, \quad B = M''M^{-1}, \\ \vec{u}_0 = \vec{x}_0' - M'M^{-1}\vec{x}_0, \quad \vec{a} = \vec{x}_0'' - M''M^{-1}\vec{x}_0. \end{gathered}$$

Из уравнений (1.2) следуют уравнения лагранжевой подмодели

$$M^T M'' = C = S_0 + E < \vec{\omega}_0 >, \quad M^T\vec{x}_0'' = \vec{c}, \quad |M| = 1, \tag{1.5}$$

где C и $\vec{c}$ – постоянные матрица и вектор как результат интегрирования, $S_0 = \|s_{ij}^0\|$ и $E < \vec{\omega}_0 >$ – симметричная и антисимметричная части матрицы C. Здесь использовано тождество

$$|M|' = |M|\mathrm{tr}(M'M^{-1}).$$

Начальные условия системы (1.5) имеют вид

$$M(t_0) = I, \quad M'(t_0) = M_1 = S_1 + E < \vec{\omega}_1 >, \quad \mathrm{tr}S_1 = 0, \tag{1.6}$$

где S_1 и $E < \vec{\omega}_1 >$ – симметричная и антисимметричная части матрицы M_1. Антисимметричные матрицы задаются векторами по формуле

$$E < \vec{\omega}_i > = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_i^3 & \omega_i^2 \\ \omega_i^3 & 0 & -\omega_i^1 \\ -\omega_i^2 & \omega_i^1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В лагранжевых переменных уравнения (0.1) принимают вид

$$p_t = 0, \quad \rho_t = 0, \quad \nabla_\xi p = -\rho(\vec{\xi})(C\vec{\xi} + \vec{c}). \tag{1.7}$$

Условия совместности системы (1.7) таковы

$$\nabla_\xi \rho \times (S_0\vec{\xi} + \vec{c} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\xi}) = 2\rho\vec{\omega}_0.$$

Отсюда следуют равенства для движений с переменной плотностью

$$\vec{\omega}_0 \cdot \nabla_\xi \rho = 0, \quad \nabla_\xi \rho \times (S_0\vec{\xi} + \vec{c}) + \vec{\omega}_0(\vec{\xi} \cdot \nabla_\xi \rho - 2\rho) = 0, \tag{1.8}$$

$$\nabla_\xi \rho(\vec{\omega}_0 \cdot (S_0\vec{\xi} + \vec{c})) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0\vec{\omega}_0 = 0, \quad \vec{\omega}_0 \cdot \vec{c} = 0. \tag{1.9}$$

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то из уравнений (1.8) и (1.7) следуют выражения для плотности и давления

$$\rho = P'(J), \quad p = P_0 - P(J), \quad J = 2^{-1}\vec{\xi} \cdot S_0\vec{\xi} + \vec{c} \cdot \vec{\xi}.$$

Здесь и далее P_0 – постоянная, $P(J)$ – произвольная функция.

Если $\vec{\omega}_0 \neq 0$, например, $\omega_0^1 \neq 0$, то скалярное уравнение в (1.8) имеет общее решение

$$\rho = \rho(\alpha, \beta), \quad \alpha = \xi^2 - \omega_0^2(\omega_0^1)^{-1}\xi^1, \quad \beta = \xi^3 - \omega_0^3(\omega_0^1)^{-1}\xi^1,$$

и векторное уравнение (1.8) сводится к уравнению

$$\rho_\alpha(c^3 + (s_{23}^0 + \omega_0^2)\alpha + s_{33}^0\beta) + \rho_\beta(-c^2 - s_{22}^0\alpha - (s_{23}^0 - \omega_0^1)\beta) = -2\omega_0^1\rho. \tag{1.10}$$

Если $\triangle = s_{22}^0 s_{33}^0 - (s_{23}^0)^2 + (\omega_0^1)^2 \neq 0$, то возможно сдвинуть независимые переменные α, β на постоянные α_0 , β_0

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_0,$$
$$\alpha_0 = \triangle^{-1}(c^3(s_{23}^0 - \omega_0^1) - c^2 s_{33}^0), \quad \beta_0 = \triangle^{-1}(c^2(s_{23}^0 + \omega_0^1) - c^3 s_{22}^0)$$

так, чтобы уравнение (1.10) допускало равномерное растяжение по переменным α_1 и β_1. Тогда, вводя инвариант $K = \beta_1\alpha_1^{-1}$ в качестве новой независимой переменной вместе с α_1, получим интегрируемое уравнение. Его решение и решение уравнения (1.7) представляются в виде

$$\rho = R''(J)\exp(2\omega_0^1 \int P^{-1}(K)dK), \quad J = \alpha_1^2 P(K)\exp(2\omega_0^1 \int P^{-1}(K)dK),$$
$$P(K) = s_{33}^0 K^2 + 2s_{23}^0 K + s_{22}^0, \quad p = P_0 + R(J) - JR'(J), \quad R'' > 0, \tag{1.11}$$

где $R(J)$ – произвольная функция.

Если $(s_{22}^0)^{-1}(s_{23}^0 - \omega_0^1) = s_{33}^0(s_{23}^0 + \omega_0^1)^{-1} = \lambda \neq 0$, то замена $K = \alpha + \beta\lambda$ приводит к интегрируемому уравнению (1.10). Его решение и решение уравнения (1.7) имеют вид

$$\rho = \frac{JP'(J)}{2\omega_0^1 K + c^3 - \lambda c^2}, \quad J = |2\omega_0^1 K + c^3 - \lambda c^2|^n \exp(\beta + 2^{-1}(\omega_0^1)^{-1} s_{22}^0 K),$$
$$p = P_0 - P(J), \quad n = 4^{-1}(\omega_0^1)^{-2}((s_{23}^0 + \omega_0^1)c^2 - s_{22}^0 c^3). \tag{1.12}$$

Если $\lambda = 0$, $s_{33}^0 = 0$, $s_{23}^0 = \omega_0^1$, то формулы (1.12) верны и в этом случае.

Для постоянной плотности из уравнения (1.7) следует

$$\vec{\omega}_0 = 0, \quad p = P_0 - \rho_0(\vec{c} \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot S_0\vec{\xi}).$$

Итак, формулы для плотности и давления получены в лагранжевых переменных.

2. Решения с линейной матрицей линейного поля скоростей

Если матрица $C = 0$, то матрица M линейна по времени t ($t_0 = 0$)

$$M = I + tM_1.$$

Из уравнения $|M| = 1$ следуют равенства $|M_1| = 0$, $\mathrm{tr}M_1 = 0$, $\mathrm{tr}M_1^2 = 0$, то есть матрица M_1 нильпотентна $M_1^3 = 0$,

$$M^{-1} = I - M_1 t + M_1^2 t^2, \quad A = M'M^{-1} = M_1 - M_1^2 t.$$

Выбором системы координат матрица M_1 приводится к жордановому виду. Все собственные числа матрицы M_1 нулевые. Возможно два типа жордановых матриц:

$$1) \quad M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = A, \quad \vec{u}_0 = \begin{Vmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_6 - (C_3 + 6C_5)t - C_4 t^2 - C_5 t^3 \\ C_3 + 2C_4 t + 3C_5 t^2 \end{Vmatrix};$$

$$2) \quad M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\vec{u}_0 = \begin{Vmatrix} C_6 + (12C_1 - C_5)t + (C_4 - 3C_2)t^2 + (2C_1 + C_3)t^3 + C_2 t^4 - C_1 t^5 \\ C_5 + (6C_2 - C_4)t - (6C_1 + C_3)t^2 - C_2 t^3 + C_1 t^4 \\ C_4 + 2C_3 t + 3C_2 t^2 - 4C_1 t^3 \end{Vmatrix}.$$

Здесь C_i – постоянные.

Далее матрица C не нулевая.

3. Интегралы лагранжевой модели и ее модификация

Симметричная часть матричного уравнения модели (1.5) имеет вид

$$M^T M'' + M''^T M = 2S_0. \tag{3.1}$$

Антисимметричная часть матричного уравнения (1.5) интегрируется

$$M^T M' - M'^T M = 2E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega} = t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1. \tag{3.2}$$

Здесь начальные условия (1.6) взяты при $t_0 = 0$.

Уравнения (1.5) допускают перенос по t. Начальные условия при $\vec{\omega}_0 \neq 0$ перенесем в $t_0 = -(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1)|\vec{\omega}_0|^{-2}$, чтобы преобразованный вектор $\vec{\omega}_1' = t_0\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1$ стал ортогональным вектору $\vec{\omega}_0$. Это все равно, что при $t_0 = 0$ выполнено равенство

$$\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0. \tag{3.3}$$

Матрицу M можно представить в виде произведения ортогональной и симметричной матриц

$$M = Q\Lambda, \quad QQ^T = I, \quad \Lambda^T = \Lambda, \quad |\Lambda| = 1, \quad |Q| = 1,$$

$$\Lambda(0) = I, \quad Q(0) = I, \quad \Lambda'(0) = S_1.$$

Матрица $E < \vec{q} >= Q^T Q'$ антисимметрична, $\vec{q}(0) = \vec{\omega}_1$.

Интеграл (3.2) записывается в виде

$$\Lambda\Lambda' - \Lambda'\Lambda + 2E < \Lambda^{-1}\vec{q} >= 2E < \vec{\omega} > .$$

Отсюда определяется матрица

$$E < \vec{q} >= E < \Lambda\vec{\omega} > +2^{-1}(\Lambda^{-1}\Lambda' - \Lambda'\Lambda^{-1}). \tag{3.4}$$

В силу (3.4) уравнение (3.1) представляется в виде

$$(\Lambda^2)'' = ((\Lambda^2)' - 2E < \vec{\omega} >)\Lambda^{-2}((\Lambda^2)' + 2E < \vec{\omega} >) + 4S_0. \tag{3.5}$$

Начальные условия (1.6) записываются в виде

$$\Lambda^2(0) = I, \quad (\Lambda^2)'(0) = 2S_1, \quad \mathrm{tr}S_1 = 0, \quad (\Lambda^2)''(0) = 2(M_1^T M_1 + S_0). \tag{3.6}$$

Симметричную матрицу Λ^2 удобно представить в виде

$$\Lambda^2 = ODO^T, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad OO^T = I, \quad |O| = 1.$$

Выбором системы координат начальные условия можно представить в виде

$$O(0) = I, \quad D(0) = I, \quad D'(0) = 2S_1. \tag{3.7}$$

Матрицу поворота O можно задать вектором угловой скорости $\vec{\sigma}$

$$O' = OE < \vec{\sigma} > .$$

Скалярное уравнение (1.5) принимает простой вид

$$|D| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

4. Простейшее решение

Система (3.5) совместна. Действительно, при $\Lambda^2 = I$ из равенств (3.5), (3.6) следуют условия совместности для параметров

$$S_0 = E < \vec{\omega} >^2, \quad S_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_0 = 0, \quad S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2 \neq 0. \tag{4.1}$$

При этих значениях параметров из равенства (3.4) следуют соотношения

$$Q' = QE < \vec{\omega}_1 >, \quad M = Q, \quad O(0) = I.$$

Матричное уравнение интегрируется $Q = \exp(tE < \vec{\omega}_1 >)$ и следует, что матрицы Q и $E < \vec{\omega}_1 >$ перестановочны.

С помощью формулы

$$E < \vec{\omega}_1 >^{2k} = (-1)^k |\vec{\omega}_1|^{2k} (I - \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \otimes \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|})$$

вычисляется матричная экспонента

$$M = \exp(tE < \vec{\omega}_1 >) = I \cos(t|\vec{\omega}_1|) + \sin(t|\vec{\omega}_1|) E < \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} > +$$

$$+ (1 - \cos(t|\vec{\omega}_1|)) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \otimes \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|}.$$

Векторное уравнение (1.5) принимает вид

$$\vec{x}_0'' = \vec{c} \cos(t|\vec{\omega}_1|) + (1 - \cos(t|\vec{\omega}_1|)) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^2} (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{c}) + \sin(t|\vec{\omega}_1|) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \times \vec{c}.$$

Интегрирование дает

$$\vec{x}_0 = -\frac{\vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2} \cos(t|\vec{\omega}_1|) + (2^{-1} t^2 + \frac{\cos(t|\vec{\omega}_1|)}{|\vec{\omega}_1|^2}) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^2} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{c} -$$

$$- \sin(t|\vec{\omega}_1|) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^3} \times \vec{c} + t(\vec{c}_1 + \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2}) + \frac{\vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2} - \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^4} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{c},$$

где $\vec{c}$ и $\vec{c}_1$ – постоянные векторы.

Вектор $\vec{u}_0$ определяется из выражения (1.1) по формуле

$$\vec{u}_0 = \vec{x}_0' - \vec{\omega}_1 \times \vec{x}_0.$$

Если $\Lambda^2 = I$, то движение среды происходит как движение твердого тела [6, §1].

Верно утверждение: условие $S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2$ необходимо и достаточно для существования простейшего решения. Это легко доказать непосредственно, но это же следует из последующего утверждения об отсутствии других решений.

5. Об отсутствии других решений

Кроме решений с линейной матрицей M по времени и простейших решений с единичной матрицей $\Lambda^2 = I$ других решений уравнения (1.5) не имеют. Это было доказано в плоском случае в работе [4]. Собственные числа матрицы Λ^2 в плоском случае равны единице: $D = I$. Собственные числа матрицы Λ^2 в пространственном случае удовлетворяют соотношениям $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. По теореме о перемежуемости сингулярных чисел [5] выполняются неравенства

$$0 < \lambda_1 \leqslant 1 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1 \leqslant \lambda_3.$$

Значит, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = d$, $\lambda_3 = d^{-1}$ и $D = de_{11} + e_{22} + d^{-1} e_{33}$. Здесь и далее e_{ij} – матрица размера 3×3, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит единица, а в остальных местах нули.

Удобно в качестве независимой переменной выбрать значения функции $d(t)$, $d(0) = 1$. Функция $t(d)$ – обратная к функции $d(t)$. Уравнения (3.5) принимают вид

$$2\ddot{\Lambda}^2\dot{t} - 2\dot{\Lambda}^2\ddot{t} = \dot{t}(\dot{\Lambda}^2 - 2\dot{t}E < \vec{\omega} >)\Lambda^{-2}(\dot{\Lambda}^2 + 2\dot{t}E < \vec{\omega} >) + 4\dot{t}^3 S_0, \tag{5.1}$$

$$\Lambda^2(1) = I, \quad \dot{\Lambda}^2(1) = 2t_1 S_1, \tag{5.2}$$

где точкой обозначена производная по переменной d.

Функция $t(d)$ представляется рядом

$$t = t_1(d-1) + \sum_{i\geq 2} t_i(d-1)^i.$$

При $t_1 \neq 0$ замена $t_i t_1^{-1} \to t_i$, $t_1^2\vec{\omega}_0 \to \vec{\omega}_0$, $t_1\vec{\omega}_1 \to \vec{\omega}_1$, $t_1^2 S_0 \to S_0$, $t_1 S_1 \to S_1$ делает $t_1 = 1$.

Матрица Λ^2 представляется в виде

$$\Lambda^2 = O\mathrm{diag}(d, 1, d^{-1})O^T = I + (d-1)(G_1 - d^{-1}G_3), \tag{5.3}$$

$$\Lambda^{-2} = I + (d-1)(G_3 - d^{-1}G_1), \tag{5.4}$$

где $G_k = Oe_{kk}O^T$, $G_k^2 = G_k$, $O(1) = I$, $G_1G_3 = 0$,

$$\dot{G}_k = \mathrm{ad}(\vec{\sigma})G_k, \quad G_k(1) = e_{kk}. \tag{5.5}$$

Из условия (5.2) следует равенство $e_{11} - e_{33} = 2S_1$. Уравнение (5.1) при $d = 1$ определяет матрицу

$$S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2 + \mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0 + 2^{-1}\vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) - 4^{-1}e_{11} + 4^{-1}3e_{33} - t_2(e_{11} - e_{33}), \tag{5.6}$$

где $\vec{\sigma}(1) = \vec{\sigma}_0$. Здесь использовано стандартное обозначение для коммутатора матриц

$$\mathrm{ad}(\vec{\sigma})S = E < \vec{\sigma} > S - SE < \vec{\sigma} > .$$

Все величины, входящие в уравнение (5.1), выражаются через функции t, $\vec{\sigma}$ и параметры $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_1$, которые связаны четырьмя скалярными соотношениями $S_0\vec{\omega}_0 = 0$, $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$:

$$\dot{\Lambda}^2 = G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3),$$

$$\ddot{\Lambda}^2 = 2d^{-3}G_3 + 2\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-2}G_3) + (d-1)(\mathrm{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \mathrm{ad}(\vec{\sigma})^2)(G_1 - d^{-1}G_3).$$

Решение уравнения (5.1) представляются рядами

$$t = d - 1 + \sum_{i\geq 2} t_i(d-1)^i, \quad \vec{\sigma} = \sum_{i\geq 0} \vec{\sigma}_i(d-1)^i. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.1) после подстановки матрицы (5.3) записывается в виде

$$\begin{gathered}
4\dot{t}(d^{-3}G_3 + \mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-2}G_3)) - 2\ddot{t}(G_1 - d^{-2}G_3) - \dot{t}(G_1 + d^{-4}G_3) + \\
+2\dot{t}^2\mathrm{ad}(\vec{\omega}_1)(G_1 - d^{-2}G_3) - 4\dot{t}^3[\mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0 + 2^{-1}\vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) - 4^{-1}e_{11} + 4^{-1}3e_{33} - t_2(e_{11} - e_{33})] = \\
= 2\ddot{t}(d-1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 2\dot{t}(d-1)(\mathrm{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \mathrm{ad}(\vec{\sigma})^2)(G_1 - d^{-1}G_3) + \\
+\dot{t}(d-1)[\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 + d^{-3}G_3) - d^{-2}(d-1)(G_1E < \vec{\sigma} > G_3 - G_3E < \vec{\sigma} > G_1)] + \\
+\dot{t}(d-1)^2(\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3))^2 - 2\dot{t}^2 t\,\mathrm{ad}(\vec{\omega}_0)[G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3)] - \\
-2\dot{t}(d-1)\mathrm{ad}(\vec{\omega}_1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 4\dot{t}^3 t(tE < \vec{\omega}_0 >^2 + \omega_0 \otimes \omega_1 + \omega_1 \otimes \omega_0) + \\
+(d-1)\dot{t}[G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 2\dot{t}E < \vec{\omega} >](G_3 - d^{-1}G_1)[G_1 - d^{-2}G_3 + \\
+(d-1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) + 2\dot{t}E < \vec{\omega} >].
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Обнуление коэффициента при $d - 1$ в уравнении (5.8) дает матричное равенство

$$\begin{gathered}
-12(t_3 - 2t_2^2)(e_{11} - e_{33}) - 4t_2\mathrm{ad}(5\vec{\sigma}_0 + \vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) + 4t_2(e_{11} - 5e_{33}) + \\
+\mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0)(11e_{33} - e_{11}) + 4\mathrm{ad}(\vec{\omega}_1)e_{33} + 6(\mathrm{ad}(\vec{\sigma}_1) + \mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0)^2)(e_{11} - e_{33}) - \\
-12t_3\mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} - e_{33}) - \mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} + e_{33}) + 2\mathrm{ad}(\vec{\omega}_0)(e_{11} - e_{33}) + 4\mathrm{ad}(\vec{\omega}_1)\mathrm{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} - e_{33}) + \\
+4\vec{\omega}_0 \otimes \vec{\omega}_1 + 4\vec{\omega}_1 \otimes \vec{\omega}_0 + e_{11} - 9e_{33} + 2\mathrm{ad}(\vec{\omega}_1)(e_{11} + e_{33}) + 4E < \vec{\omega}_1 > (e_{33} - e_{11})E < \vec{\omega}_1 > = 0.
\end{gathered}$$

След этого матричного равенства определяет параметр

$$t_2 = -2^{-1} + 4^{-1}((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2).$$

Верхние диагональные элементы определяют параметр

$$12t_3 = 5 - (\omega_1^3)^2 + (\omega_1^1)^2 + 2^{-1}3((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2)^2 - 12(\sigma_0^1)^2 - 24(\sigma_0^2)^2 -$$

$$-8\omega_1^1\sigma_0^1 - 16\omega_1^2\sigma_0^2 - 8\omega_0^3\omega_1^3 - 4(\omega_1^2)^2.$$

Недиагональные элементы определяют вектор $\vec{\sigma}_1$. Средние диагональные элементы дают уравнение

$$3(\sigma_0^3)^2 - 3(\sigma_0^1)^2 + 2\omega_1^3\sigma_0^3 - 2\omega_1^1\sigma_0^1 + 2\omega_0^2\omega_1^2 + (\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2 = 0. \tag{5.9}$$

Равенство $S_0\vec{\omega}_0 = 0$ определяет вектор $\vec{\sigma}_0$ при $\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \neq 0$:

$$4\omega_0^1\omega_0^3(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) = \vec{\omega}_1^2((\omega_0^2)^2 - (\omega_0^1)^2 - (\omega_0^3)^2) + 4^{-1}((\omega_0^1)^2 + (\omega_0^3)^2) +$$

$$+4^{-1}((\omega_0^1)^2 - (\omega_0^3)^2)((\omega_1^1)^2 - (\omega_1^3)^2),$$

$$\omega_0^2(\sigma_0^1 + 2^{-1}\omega_1^1) = 2\omega_0^1(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) + \omega_0^3(\vec{\omega}_1^2 - 4^{-1} + 4^{-1}(\omega_1^1)^2 - 4^{-1}(\omega_1^3)^2), \tag{5.10}$$

$$\omega_0^2(\sigma_0^3 + 2^{-1}\omega_1^3) = 2\omega_0^3(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) + \omega_0^1(\vec{\omega}_1^2 - 4^{-1} - 4^{-1}(\omega_1^1)^2 + 4^{-1}(\omega_1^3)^2).$$

Итак, имеется два уравнения (5.9) и $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$ для шести параметров.

Если $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^1\omega_0^3 \neq 0$, то из (5.10) определяется σ_0^2 и остается три уравнения

$$((\omega_1^1)^2 - (\omega_1^3)^2)(4\vec{\omega}_1^2 - 1 + (\omega_1^1)^2 + (\omega_1^3)^2) = 0$$

$$\omega_0^1\omega_1^1 + \omega_0^3\omega_1^3 = 0$$

$$3(\sigma_0^3)^2 + 2\omega_1^3\sigma_0^3 + (\omega_1^3)^2 = 3(\sigma_0^1)^2 + 2\omega_1^1\sigma_0^1 + (\omega_1^1)^2 \tag{5.11}$$

для семи параметров $\vec{\omega}_1$, ω_0^1, ω_0^3, σ_0^1, σ_0^3.

Если $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^1 = 0$, $\omega_0^2 \neq 0$, то $\sigma_0^2 = -2^{-1}\omega_1^2$, $\omega_1^3 = 0$ и остается два уравнения (5.11) и $5(\omega_1^1)^2 + 4(\omega_1^2)^2 = 1$ для пяти параметров σ_0^1, σ_0^3, ω_0^3, ω_1^1, ω_1^2.

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то имеется только одно уравнение (5.11) для шести параметров $\vec{\sigma}_0$, $\vec{\omega}_1$.

Если $\omega_0^2 \neq 0$, $\omega_0^1 = 0$ (или $\omega_0^3 = 0$), то определяются σ_0^1, σ_0^3 и остается три уравнения (5.9), $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$ и

$$(\omega_1^2)^2(4\vec{\omega}_1^2 - 1) = (4\vec{\omega}_1^2 + 1)((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2)$$

для шести параметров $\vec{\omega}_1$, ω_0^2, ω_0^3 (или ω_0^1), σ_0^2.

Наконец, если $\omega_0^1 = \omega_0^3 = 0$, $\omega_0^2 \neq 0$, то $\vec{\omega}_1 = 0$, $(\sigma_0^3)^2 = (\sigma_0^2)^2$. Есть только одно уравнение для четырех параметров $\vec{\sigma}_0$, ω_0^2.

Обнуление коэффициента при $(d-1)^2$ в уравнении (5.8) дает шесть скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_4, $\vec{\sigma}_2$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров.

Обнуление коэффициента при $(d-1)^3$ в уравнении (5.8) дает шесть новых скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_5, $\vec{\sigma}_3$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров.

Обнуление коэффициента при $(d-1)^4$ в уравнении (5.8) дает шесть новых скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_6, $\vec{\sigma}_4$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров, которые переопределяют алгебраическую систему.

На каждом шаге обнуление коэффициента при $(d-1)^k$ в уравнении (5.8) определяет параметры $t_{(k+1)}$, $\vec{\sigma}_k$ и добавляет два новых уравнения на отмеченные выше параметры. Таким образом, получается бесконечная цепочка уравнений на параметры, число которых не более шести. Этот факт неизбежно приводит к противоречию.

Оригинальное доказательство противоречия состоит в следующем. Уравнения $G_k^2 = G_k$, $k = 1, 3$ имеют решения $G_k = \vec{\lambda}_k \otimes \vec{\lambda}_k$, $\vec{\lambda}^2 = 1$. Из условия $G_1 G_3 = 0$ следует $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_3 = 0$. С обозначением $\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_3 \times \vec{\lambda}_1$ трехвекторник $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$, $\vec{\lambda}_3$ образует подвижный ортонормированный репер. Уравнения (5.5) определяют движения подвижного репера

$$\dot{\vec{\lambda}}_k = \vec{\sigma} \times \vec{\lambda}_k, \quad \vec{\lambda}_k(1) = \vec{e}_k, \quad k = 1, 2, 3 \tag{5.12}$$

где

$$\vec{e}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad \vec{e}_2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad \vec{e}_3 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|,$$

а $\vec{\sigma}$ – угловая скорость подвижного репера.

Из уравнения (5.12) следует равенство

$$2\vec{\sigma} = \vec{\lambda}_1 \times \dot{\vec{\lambda}}_1 + \vec{\lambda}_2 \times \dot{\vec{\lambda}}_2 + \vec{\lambda}_3 \times \dot{\vec{\lambda}}_3 \tag{5.13}$$

Из равенств $G_k^2 = G_k$ и (5.13) следует, что функции $\vec{\lambda}_k$, $\vec{\sigma}$ не имеют полюсов для любого значения d.

Справедливы формулы

$$\mathrm{ad}(\vec{\sigma})G_k = \dot{\vec{\lambda}}_k \otimes \vec{\lambda}_k + \vec{\lambda}_k \otimes \dot{\vec{\lambda}}_k,$$
$$(\mathrm{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \mathrm{ad}(\vec{\sigma})^2)G_k = \ddot{\vec{\lambda}}_k \otimes \vec{\lambda}_k + \vec{\lambda}_k \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_k + 2\dot{\vec{\lambda}}_k \times \dot{\vec{\lambda}}_k,$$

в силу которых уравнение (5.8) принимает вид

$$\begin{gathered}
2d^2\ddot{t}[2\vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + 2d^3(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - 2d(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) + \\
+ d^3(d-1)(\ddot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_1) + d^2(d-1)(\ddot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_3 + 2\dot{\vec{\lambda}}_3 \times \dot{\vec{\lambda}}_3)] - \\
-2d^3\ddot{t}[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3)] = \\
= \dot{t}[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) - \\
-2d^2\dot{t}E < t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 >](dI + (d-1)(d\vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 - \vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1)[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \\
-\vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) + \\
+2d^2\dot{t}E < t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 >] + 4d^5\dot{t}^3 S_0.
\end{gathered}$$

Коэффициенты при t, $\dot{t}$, $\ddot{t}$ не имеют полюсов в точке $d = 0$. Главные члены асимтотик этих коэффициентов дают приближенное равенство

$$(\dot{t} + 2^{-1}d\ddot{t})\vec{\lambda}_{03} \otimes \vec{\lambda}_{03} \simeq -d^2\dot{t}^3[((t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes ((t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}) + dS_0], \tag{5.14}$$

где $\vec{\lambda}_{k0} = \vec{\lambda}_k(0)$.

Пусть функция $t(d)$ имеет особенность в точке $d = 0$ типа полюса $t = t_{-j}d^{-j} + \ldots$, $t_{-j} \neq 0$, $j > 0$. Тогда равенство (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}j(j-1)t_{-j}\vec{\lambda}_{30} \otimes \vec{\lambda}_{30} \simeq t_{-j}^5 j^3 d^{-4j}(\vec{\omega}_0 \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes (\vec{\omega}_0 \times \vec{\lambda}_{10}).$$

Отсюда следует равенство $\vec{\lambda}_{10} = k\vec{\omega}_0$. С учетом полученного соотношения равенство (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}j(j-1)t_{-j}\vec{\lambda}_{30} \otimes \vec{\lambda}_{30} \simeq t_{-j}^3 j^3 d^{-2j}(\vec{\omega}_1 \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes (\vec{\omega}_1 \times \vec{\lambda}_{10}).$$

Отсюда следует равенство $\vec{\lambda}_{10} = l\vec{\omega}_1$. Скалярное умножение полученных соотношений приводит к противоречию

$$1 = \vec{\lambda}_{10}^2 = kl\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0.$$

Значит, функция $t(d)$ не имеет особенности в нуле. Пусть $t = t_0 + t_k d^k + ...$, $k > 0$, тогда (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}k(k+1)t_k\vec{\lambda}_{03}\otimes\vec{\lambda}_{03} \simeq k^3 t_k^3 d^{2k+2}[((t_0\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_1)\times\vec{\lambda}_{10})\otimes((t_0\vec{\omega}_0+\vec{\omega}_1)\times\vec{\lambda}_{10})+dS_0].$$

Отсюда следует $t_k = 0$, $k > 0$ и t – постоянно. Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юлмухаметова Ю.В. *Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 128–136.
2. Юлмухаметова Ю.В. *Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 139–150.
3. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* Москва–Ижевск: ИКТ, 2003. 336 с.
4. Хабиров С.В. *Плоские движения газа без расхождения с линейным полем скоростей* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 3. С. 107-113.
5. Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 1997. 390 с.
6. Годунов С.К., Роменский Е.И. *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения.* Новосибирск: Научная книга, 1998. 280 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru