

# ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТЯХ

И.А. КАЛИЕВ, А.А. ШУХАРДИН, Г.С. САБИТОВА

**Аннотация.** В данной работе для полной системы уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа доказывается глобальная разрешимость начально-краевых задач в нецилиндрических возрастающих по времени областях. Локальная теорема существования и единственности рассматриваемых задач доказана в более ранних работах Кажихова А.В. и Калиева И.А. Поэтому доказательство теоремы существования и единственности "в целом" по времени связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени  $T$ , но не зависят от промежутка существования локального решения. Исследования проводятся в эйлеровых переменных.

**Ключевые слова:** Система уравнений Навье-Стокса, теплопроводный газ, глобальная разрешимость, нецилиндрические возрастающие по времени области.

**Mathematics Subject Classification:** 35Q30, 76D05, 76N10

## ВВЕДЕНИЕ

Полная система уравнений движения вязкого теплопроводного газа, или система уравнений Навье-Стокса представляет собой интересный и важный класс дифференциальных уравнений в частных производных. В теории таких систем одной из центральных является проблема однозначной разрешимости "в целом" как по времени, так и по данным.

Изучение вопросов корректности начально-краевых задач для системы уравнений Навье-Стокса началось с работы Дж. Серрина 1959 г. [1]. В ней были сформулированы постановки основных краевых задач и доказаны теоремы единственности в классе гладких решений. Отметим также более раннюю статью Д. Граффи 1953 г. [2] о единственности классических решений для баротропного газа.

Первый результат по разрешимости для уравнений Навье-Стокса получил в 1962 г. Дж. Нэш [3]. Он доказал существование классического решения задачи Коши "в малом" по времени. Этот результат несколько иными методами был повторен и обобщен в работах Н. Итая [4], А.И. Вольперта и С.И. Худяева [5].

Для начально-краевых задач локальные по времени теоремы существования и единственности установлены В.А. Солонниковым [6] и А. Тани [7].

Первый результат по однозначности разрешимости "в целом" по времени и по данным был установлен в 1968 г. Я.И. Канелем [8] в случае задачи Коши для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа ( $p = R\rho^\gamma$ ). Для модели Бюргерса ( $p = const$ ) разрешимость задачи Коши и начально-краевых задач были доказаны в работах Н. Итая [9], [10] и А. Тани [11].

В 1976 г. А.В. Кажихов [12] впервые получил результат о глобальной разрешимости для уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа. В дальнейшем цикл работ А.В. Кажихова [13]–[16], В.В. Шелухина [17]–[19], С.Я. Белова [20], В.А. Вайганта [21], [22] позволил

---

I.A. KALIEV, A.A. SHUKHARDIN, G.S. SABITOVA, BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS IN TIME-INCREASING NON-CYLINDRICAL DOMAINS.

© Калиев И.А., Шухардин А.А., Сабитова Г.С. 2014.

Поступила 4 июля 2014 г.

построить довольно полную теорию по глобальной разрешимости основных начально-краевых задач и задачи Коши для уравнений движения вязкого газа.

В работах И.А. Калиева, А.В. Кажихова [23], [24] исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи со свободной границей, моделирующей процесс фазового перехода между вязким газом и твердым телом. При этом возникает вспомогательная задача, описывающая движение вязкого теплопроводного газа в криволинейной области, доказываются единственность и существование ее локального решения.

Как правило, область, в которой доказываются существование решения "в целом" по времени, является либо полосой  $\{(x, t) | -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$ , либо цилиндром  $\{(x, t) | a < x < b, 0 < t < T\}$ ;  $a, b, T$  – заданные постоянные. В нашей работе для полной системы уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа доказываются глобальная разрешимость начально-краевых задач в нецилиндрических возрастающих со временем областях  $\{(x, t) | 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ , где  $x = s(t)$  – заданная гладкая возрастающая функция.

Для вязкого газа известны результаты по глобальной разрешимости задачи со свободной границей об истечении газа в вакуум [12], [25] и задачи о поршне, который движется по заданному закону [25]. В обеих задачах скорость движения границы  $s(t)$  области, занятой газом, совпадает со скоростью движения материальной точки с координатой  $s(t)$ , т.е.  $u(s(t), t) = ds(t)/dt, 0 < t < T$ . Другими словами, газ через границу  $s(t)$  не течет, и этот факт играет решающую роль при доказательстве теорем существования, поскольку область определения решения в лагранжевых координатах становится фиксированным цилиндром.

В настоящей работе  $u(s(t), t) = 0, ds(t)/dt > 0$ , т.е.  $u(s(t), t) - ds(t)/dt < 0$ , и газ втекает через подвижную границу области  $x = s(t)$ . В статье исследование проводится в эйлеровых переменных.

Случай, когда  $ds(t)/dt \leq 0$ , рассмотрен в работах Калиева И.А. и Подкуйко М.С. [26], [27].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть нецилиндрическая область  $\Omega_T = \{(x, t) | 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ , где  $x = s(t)$  – известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. В работе изучается случай, когда область расширяется со временем, т.е.  $ds(t)/dt > 0$ . Одномерное нестационарное движение вязкого теплопроводного газа в области  $\Omega_T$  описывается системой уравнений [25]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_T. \quad (3)$$

Здесь  $\rho(x, t), u(x, t), p(x, t)$  и  $\theta(x, t)$  – плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа;  $\mu, R, \kappa$  – положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются  $u, \theta, \rho$ :

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta(x, t)|_{t=0} = \theta_0(x), \quad \rho(x, t)|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in [0, s_0], \quad (4)$$

где  $s_0 = s(0)$ . На известных границах  $x = 0$  и  $x = s(t)$  задаются условия:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=s(t)} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\theta(x, t)|_{x=0} = \theta_1(t), \quad \theta(x, t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\rho(x, t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (7)$$

Предполагается, что для всех  $t \in [0, T]$  и  $x \in [0, s_0]$  выполняются неравенства:

$$0 < m \leq \rho_0(x), \rho_2(t), \theta_0(x), \theta_1(t), \theta_2(t) \leq M < +\infty, \quad (8)$$

$$0 < s_0, 0 < m \leq \frac{ds}{dt}(t) \leq M, \quad (9)$$

где  $m, M$  – некоторые положительные константы.

**Задача Gas.** Требуется найти функции  $\rho(x, t), u(x, t), \theta(x, t)$ , удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).

**Теорема 1.** Пусть начальные и краевые данные задачи Gas принадлежат пространствам Гельдера

$$\begin{aligned} \rho_0(x) \in C^{1+\alpha}([0, s_0]), \quad u_0(x) \in C^{2+\alpha}([0, s_0]), \quad \theta_0(x) \in C^{2+\alpha}([0, s_0]), \\ s(t), \rho_2(t) \in C^{1+\alpha}([0, T]), \quad \theta_1(t), \theta_2(t) \in C^{(2+\alpha)/2}([0, T]), \end{aligned}$$

$0 < \alpha = \text{const} < 1$ ; выполнены условия (8), (9) и условия согласования нулевого и первого порядков в точках  $(0, 0), (s_0, 0)$ .

Тогда задача Gas имеет единственное классическое решение, обладающее свойствами

$$\rho(x, t) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T), \quad u(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T), \quad \theta(x, t) \in C^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),$$

причем

$$\begin{aligned} 0 < m_1 \leq \rho(x, t) \leq M_1 < +\infty, \quad 0 < m_2 \leq \theta(x, t) \leq M_2 < +\infty, \\ (x, t) \in \Omega_T; \end{aligned} \quad (10)$$

где  $m_1, M_1, m_2, M_2$  – некоторые положительные константы.

Локальная теорема существования и единственности задачи Gas доказана в [23], [24]. Поэтому доказательство теоремы связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени  $T$ , но не зависят от промежутка существования локального решения.

### ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Предположим, что  $\rho(x, t) > 0, \theta(x, t) > 0$  (в малом по времени имеется теорема существования с соответствующими оценками) [23], [24].

**Лемма 1.** Для любых  $t \in [0, T]$  выполняются оценки

$$\int_0^{s(t)} \rho(x, t) dx = \int_0^{s_0} \rho_0(x) dx + \int_0^t \rho_2(\tau) \frac{ds(\tau)}{d\tau} d\tau \leq M_0,$$

где

$$M_0 = \int_0^{s_0} \rho_0(x) dx + \int_0^T \rho_2(\tau) \frac{ds(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

**Доказательство.** Используя условия (5), (7), проинтегрируем уравнение (1) по  $x$  от 0 до  $s(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho(x, t) dx - \rho_2(t) \frac{ds}{dt} = 0.$$

Интегрируя по  $t$ , получаем утверждение леммы 1:

$$\int_0^{s(t)} \rho(x, t) dx = \int_0^{s_0} \rho_0(x) dx + \int_0^t \rho_2(\tau) \frac{ds(\tau)}{d\tau} d\tau \leq M_0,$$

$$M_0 = \int_0^{s_0} \rho_0(x) dx + \int_0^T \rho_2(\tau) \frac{ds(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

В дальнейшем при получении оценок на функции  $\rho, u, \theta$  в области, занятой вязким газом, используются методы, разработанные В.А. Вайгантом [21]. Заметим, что в [21] область, занятая газом, является прямоугольником  $(0, 1) \times (0, T)$ , а у нас область, занятая газом, является криволинейной трапецией  $\Omega_T = \{(x, t) | 0 < x < s(t), 0 < t < T\}$ , где  $x = s(t)$  – заданная возрастающая функция. Тем не менее, все необходимые априорные оценки удается доказать и в нашем случае.

Введем в  $\Omega_T$  вспомогательную функцию  $B(x, t)$ , определенную следующим образом:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \rho u, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\mu} R \rho \theta - \frac{1}{\mu} \rho u^2,$$

$$B|_{t=0} = B_0(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \rho_0(\xi) u_0(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq s_0.$$

Для функции  $B(x, t)$  в [21] были получены равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}(B + \ln \rho) + u \frac{\partial}{\partial x}(B + \ln \rho) + \frac{1}{\mu} R \rho \theta = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e^B) + u \frac{\partial}{\partial x}(\rho e^B) + \frac{1}{\mu} R \rho^2 \theta e^B = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho} e^{-B}\right) + u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho} e^{-B}\right) - \frac{1}{\mu} R \theta e^{-B} = 0. \quad (13)$$

**Лемма 2.** Существует постоянная  $C$ , зависящая от граничных данных, и  $T$ , такая, что для любых  $(x, t) \in \Omega_T$  справедливо неравенство

$$|B(x, t)| \leq C \left( 1 + \left( \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau \right).$$

**Доказательство.** Проинтегрируем функцию  $\partial B / \partial t$  по области  $\Omega_t = \{(x, \tau) | 0 < x < s(\tau), 0 < \tau < t\}$ . Нам иногда будет удобнее описывать область  $\Omega_t$  в другой форме:  $\Omega_t = \{(x, \tau) | 0 < x < s(t), h(x) < \tau < t\}$ , где  $h(x) = 0$  при  $x \in [0, s_0]$  и  $s(h(x)) = x$  при  $s_0 < x \leq s(t)$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_t} B_t d\tau dx &= \int_0^{s_0} B(x, \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x, \tau) \Big|_{\tau=h(x)}^{\tau=t} dx = \\ &= \int_0^{s_0} B(x, t) dx - \int_0^{s_0} B(x, 0) dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x, t) dx - \int_{s_0}^{s(t)} B(x, h(x)) dx = \\ &= \int_0^{s(t)} B(x, t) dx - \frac{1}{\mu} \int_0^{s_0} \int_0^x \rho_0(\xi) u_0(\xi) d\xi dx - \int_{s_0}^{s(t)} B(x, h(x)) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_t} B_t dx d\tau &= \iint_{\Omega_t} \left( u_x - \frac{1}{\mu} R \rho \theta - \frac{1}{\mu} \rho u^2 \right) dx d\tau = \\ &= -\frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau - \frac{1}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} B(x, t) dx &= \frac{1}{\mu} \int_0^{s_0} \int_0^x \rho_0(\xi) u_0(\xi) d\xi dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x, h(x)) dx - \\ &\quad - \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau - \frac{1}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (8), (9) получим неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right| &\leq \frac{s_0^2 M}{2\mu} \max_{x \in [0, s_0]} |u_0(\xi)| + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau + \left| \int_{s_0}^{s(t)} B(x, h(x)) dx \right|. \end{aligned}$$

В последнем интеграле заменим переменную  $x = s(\tau)$ ,  $dx = \frac{ds}{d\tau} d\tau$ ,  $B(x, h(x)) = B(s(\tau), \tau)$  и используем (9):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right| &\leq C + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \frac{1}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau + \\ &+ M \int_0^t |B(s(\tau), \tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и в дальнейшем через  $C$  обозначаем константы, зависящие от граничных данных и  $T$ .

Так как при каждом  $t \in [0, T]$  существует точка  $x_0 = x_0(t) \in [0, s(t)]$  такая, что

$$B(x_0(t), t) = \frac{1}{s(t)} \int_0^{s(t)} B(x, t) dx,$$

то получаем

$$\begin{aligned} |B(x, t)| &\leq |B(x_0(t), t)| + \int_0^{s(t)} |B_x| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{s(t)} \left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right| + \frac{1}{\mu} \left( \int_0^{s(t)} \rho dx \right)^{1/2} \left( \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{s_0} \left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right| + \frac{1}{\mu} \sqrt{M_0} \left( \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$M_0$  – константа из леммы 1.

Для  $x = s(\tau)$  и  $t = \tau$  из (15) используя неравенство Коши, имеем:

$$|B(s(\tau), \tau)| \leq \frac{1}{s_0} \left| \int_0^{s(\tau)} B(x, \tau) dx \right| + \frac{M_0}{4\mu^2} + \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (14) дает

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{s(t)} B(x, x) dx \right| &\leq C + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \left( \frac{1}{\mu} + M \right) \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau + \\ &+ \frac{M}{s_0} \int_0^t \left| \int_0^{s(\tau)} B(x, \tau) dx \right| d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием неравенства Гронуолла для функции

$$y(t) = \left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right|,$$

получим оценку

$$\left| \int_0^{s(t)} B(x, t) dx \right| \leq C \left( 1 + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau \right).$$

Подставляя последнее неравенство в (15), получим утверждение леммы 2

$$|B(x, t)| \leq C \left[ 1 + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \left( \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx \right)^{1/2} \right].$$

**Лемма 3.** Существует постоянная  $C$ , зависящая от граничных данных и  $T$ , такая, что для любых  $t \in [0, T]$  справедливо неравенство

$$\int_0^{s(t)} (\rho \ln \rho - \rho + 1) dx + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \leq C \left( 1 + \max_{(x, \tau) \in \Omega_t} |B(x, \tau)| \right). \quad (17)$$

**Доказательство.** Умножим уравнение (11) на  $\rho(x, t)$  и проинтегрируем по  $x$  в пределах от 0 до  $s(t)$ . Тогда в силу уравнения (1) имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho(B + \ln \rho) dx - \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) [B(s(t), t) + \ln \rho_2(t)] + \\ & + [\rho u(B + \ln \rho)] \Big|_{x=0}^{x=s(t)} + \frac{R}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta dx - \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho dx + \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) \pm \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5) и (7) следует

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} (\rho B + \rho \ln \rho - \rho + 1) dx + \frac{R}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta dx - \\ & - \frac{ds(t)}{dt} \{ \rho_2(t) [B(s(t), t) + \ln \rho(s(t), t) - 1] + 1 \} = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя по времени, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{s(t)} (\rho \ln \rho - \rho + 1) dx + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau = \\ & = \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} [\rho_2(\tau) \ln \rho_2(\tau) - \rho_2(\tau) + 1] d\tau - \int_0^{s(t)} \rho B dx + \\ & + \int_0^{s_0} (\rho_0 B_0 + \rho_0 \ln \rho_0 - \rho_0 + 1) dx + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} \rho_2(\tau) B(s(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$C = \int_0^T \frac{ds(\tau)}{d\tau} [\rho_2(\tau) \ln \rho_2(\tau) - \rho_2(\tau) + 1] d\tau + \int_0^{s_0} (\rho_0 B_0 + \rho_0 \ln \rho_0 - \rho_0 + 1) dx.$$

Учитывая, что  $\rho \ln \rho - \rho + 1 \geq 0$ ,  $ds/dt > 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{s(t)} (\rho \ln \rho - \rho + 1) dx + \frac{R}{\mu} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \leq C + \int_0^{s(t)} \rho |B| dx + \\ & + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} \rho_2(\tau) |B(s(\tau), \tau)| d\tau \leq C \left( 1 + \max_{(x, \tau) \in \Omega_t} |B(x, \tau)| \right). \end{aligned}$$

В результате получаем утверждение леммы 3.

**Лемма 4.** Для любых  $t \in [0, T]$  справедливы оценки

$$\max_{0 \leq x \leq s(t)} \rho(x, t) \leq M \exp\{2 \max_{(x, \tau) \in \Omega_t} |B(x, \tau)|\}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)} \leq C \left[ \exp\{2 \max_{(x, \tau) \in \Omega_t} |B(x, \tau)|\} + \right. \\ & \left. + \exp\{4 \max_{(x, \tau) \in \Omega_t} |B(x, \tau)|\} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

**Доказательство.** Умножим равенство (12) на  $\rho(\rho e^B)^{n-1}$ , где  $n$  – натуральное число, проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$ , воспользуемся (1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho(\rho e^B)^n dx - \frac{1}{n} \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) [\rho_2(t) e^{B(s(t), t)}]^n + \frac{1}{n} \rho u(\rho e^B)^n \Big|_{x=0}^{x=s(t)} + \\ & + \frac{R}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 (\rho e^B)^n \theta dx = 0. \end{aligned}$$

С учетом (5) и (7) получим

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho(\rho e^B)^n dx - \frac{1}{n} \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) [\rho_2(t) e^{B(s(t), t)}]^n + \frac{R}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta (\rho e^B)^n dx = 0.$$

Третье слагаемое неотрицательно, тогда

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho^{n+1} e^{nB} dx - \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) [\rho_2(t) e^{B(s(t),t)}]^n \leq 0.$$

Отсюда, интегрируя по времени от 0 до  $t$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \rho^{n+1} e^{nB} dx &\leq \int_0^{s_0} \rho_0^{n+1} e^{nB_0} dx + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} \rho_2^{n+1}(\tau) e^{nB(s(\tau),\tau)} d\tau \leq \\ &\leq M^{n+1} (s_0 + TM) \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{B(x,\tau)} \right]^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \rho^{n+1} dx &\leq CM^{n+1} \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{B(x,\tau)} \right]^n \left[ \min_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{B(x,\tau)} \right]^{-n} \leq \\ &\leq CM^{n+1} \left[ \exp \left\{ 2 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} \right]^n. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , используя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

получаем оценку (18) леммы 4:

$$\max_{0 \leq x \leq s(t)} \rho(x, t) \leq M \exp \left\{ 2 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\}.$$

Чтобы доказать оценку (19), умножим равенство (13) на  $\rho(\rho e^B)^{-n}$ , где  $n$  – натуральное число, проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$ , воспользуемся (1), (7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n+1} dx - \frac{1}{n+1} \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) \left( \frac{1}{\rho_2(t) e^{B(s(t),t)}} \right)^{n+1} + \\ + \frac{1}{n+1} \rho u \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n+1} \Big|_{x=0}^{x=s(t)} = \frac{R}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho e^{-B} \theta (\rho e^B)^{-n} dx. \end{aligned}$$

В силу (5) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^n \frac{1}{e^B} dx = \frac{ds(t)}{dt} \left( \frac{1}{\rho_2(t) e^{B(s(t),t)}} \right)^n \frac{1}{e^{B(s(t),t)}} + \\ + \frac{R(n+1)}{\mu} \int_0^{s(t)} e^{-2B} \theta \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по времени от 0 до  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^n \frac{1}{e^B} dx &\leq s_0 \left( \frac{1}{m} \right)^n \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{-B(x,\tau)} \right]^{n+1} + \\ &+ MT \left( \frac{1}{m} \right)^n \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{-B(x,\tau)} \right]^{n+1} + \\ &+ \frac{R(n+1)}{\mu} \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{-2B(x,\tau)} \right] \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n-1} \theta dx d\tau. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^n dx &\leq (s_0 + MT) \left( \frac{1}{m} \right)^n \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{B(x,\tau)} \right] \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{-B(x,\tau)} \right]^{n+1} + \\ &+ \frac{R(n+1)}{\mu} \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{B(x,\tau)} \right] \left[ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} e^{-2B(x,\tau)} \right] \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n-1} \theta dx d\tau \leq \\ &\leq C \left( \frac{1}{m} \right)^n \exp \left\{ (n+2) \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} + \end{aligned} \quad (20)$$

$$+ \frac{R(n+1)}{\mu} \exp \left\{ 3 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x,\tau) \int_0^{s(\tau)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n-1} dx d\tau.$$

Обозначим

$$y(t) = \left( \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^n dx \right)^{1/n}.$$

Применяя неравенство Гельдера к последнему интегралу в (20), используя неравенство  $s(\tau) \leq s(T)$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{n-1} dx &\leq \left( \int_0^{s(t)} \left( \frac{1}{\rho e^B} \right)^{(n-1) \cdot \frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot \left( \int_0^{s(t)} 1^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \\ &\leq y^{n-1}(t) \cdot \sqrt[n]{s(T)}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку в (20), имеем

$$\begin{aligned} y^n(t) &\leq C \left( \frac{1}{m} \right)^n \exp \left\{ (n+2) \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} + \\ &+ \frac{R(n+1) \sqrt[n]{s(T)}}{\mu} \exp \left\{ 3 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x,\tau) y^{n-1}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Для оценки функции  $y(t)$  потребуется следующая лемма.

**Лемма 5.** [22] *Если непрерывная неотрицательная на  $[0, T]$  функция  $y(t)$  удовлетворяет неравенству*

$$y^n(t) \leq a + b \int_0^t c(\tau) y^{n-1}(\tau) d\tau,$$

где  $a, b = \text{const} \geq 0$ ,  $n = \text{const} \geq 1$ ,  $c(t)$  – заданная неотрицательная функция класса  $L_1[0, T]$ , то справедлива оценка

$$y(t) \leq \sqrt[n]{a} + \frac{b}{n} \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Если применить оценку (22) к неравенству (21), то получим

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \frac{\sqrt[n]{C}}{m} \exp \left\{ \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} + \\ &+ \frac{R \sqrt[n]{s(T)}}{\mu} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \exp \left\{ 3 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x,\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho e^B} &\leq \frac{1}{m} \exp \left\{ \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} + \\ &+ \frac{R}{\mu} \exp \left\{ 3 \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right\} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x,\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (19). Лемма 4 доказана.

**Лемма 6.** (Оценка полной энергии). *Существует постоянная  $C > 0$ , зависящая от граничных данных, и  $T$ , такая, что*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{s(t)} \left( \rho \theta + \frac{\rho u^2}{2} \right) dx \leq C.$$

Доказательство. Для оценки полной энергии введем вспомогательную функцию  $A(x, t)$  как решение краевой задачи:

$$\rho(A_t + uA_x) = \kappa A_{xx}, (x, t) \in \Omega_T, \quad (23)$$

$$A|_{x=0} = \theta_1(t), A|_{x=s(t)} = \theta_2(t), A|_{t=0} = \theta_0(x).$$

В силу принципа максимума имеем:

$$0 < m \leq A(x, t) \leq M < +\infty. \quad (24)$$

Функция

$$\varphi(x, t) = \theta(x, t)A^{-1}(x, t),$$

которая принимает значения

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=s(t)} = 1, \varphi|_{t=0} = 1,$$

удовлетворяет в силу (3) и (23) уравнению

$$A\rho(\varphi_t + u\varphi_x) = \kappa(A\varphi_x)_x + \kappa A_x\varphi_x + \mu u_x^2 - R\rho A\varphi u_x.$$

Умножим это уравнение на  $(1 - \frac{1}{\varphi})$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$ . Используя (23), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} A\rho(\varphi - \ln \varphi - 1)dx + \int_0^{s(t)} \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx + \int_0^{s(t)} \frac{1}{\varphi} \mu u_x^2 dx = \\ = \int_0^{s(t)} (\mu u_x^2 - R\rho A\varphi u_x)dx + \int_0^{s(t)} \frac{1}{\varphi} R\rho A\varphi u_x dx. \end{aligned} \quad (25)$$

Домножая уравнение (2) на  $u(x, t)$  и интегрируя по  $x$  от 0 до  $s(t)$ , используя (1), находим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \int_0^{s(t)} u_x(\mu u_x - p)dx = 0.$$

Сложим полученное равенство с (25)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \left( A\rho(\varphi - \ln \varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2} \right) dx + \int_0^{s(t)} \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx + \int_0^{s(t)} \mu \frac{u_x^2}{\varphi} dx = \\ = \int_0^{s(t)} R\rho A u_x dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Оценим слагаемое в правой части

$$\int_0^{s(t)} R\rho A u_x dx \leq \int_0^{s(t)} \left( \frac{\mu u_x^2}{2\varphi} + \frac{R^2 A}{2\mu} \rho^2 A \varphi \right) dx \leq \frac{\mu}{2} \int_0^{s(t)} \frac{u_x^2}{\varphi} dx + \frac{R^2 M}{2\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta dx.$$

В результате получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \left( A\rho(\varphi - \ln \varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2} \right) dx + \int_0^{s(t)} \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx + \frac{\mu}{2} \int_0^{s(t)} \frac{u_x^2}{\varphi} dx \leq \\ \leq C \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta dx. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство по времени, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \left( A\rho(\varphi - \ln \varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2} \right) dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx d\tau + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{u_x^2}{\varphi} dx d\tau \leq \\ \leq C \left( 1 + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \right). \end{aligned}$$

Учитывая неравенство

$$\varphi - \ln \varphi - 1 \geq \frac{1}{2}\varphi - \ln 2,$$

ограниченность  $A(x, t)$  из (24) и оценку леммы 1, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \rho \theta dx + \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx d\tau + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{u_x^2}{\varphi} dx d\tau \leq \\ & \leq C \left( 1 + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Из оценки (17) леммы 3 имеем

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \leq C \left( 1 + \max_{(x,\tau) \in \Omega_t} |B(x,\tau)| \right).$$

Используя неравенство леммы 2, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta dx d\tau \leq \\ & \leq C \left( 1 + \max_{0 \leq \tau \leq t} \left( \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau \right). \end{aligned}$$

Используя последнюю оценку и отбрасывая в левой части (27) интегралы, содержащие производные, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \rho \theta dx + \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx \leq \\ & \leq C \left( 1 + \max_{0 \leq \tau \leq t} \left( \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \theta dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Введем две функции на  $[0, T]$  следующим образом

$$a(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^{s(\tau)} \rho(x, \tau) u^2(x, \tau) dx, \quad b(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^{s(\tau)} \rho(x, \tau) \theta(x, \tau) dx.$$

Тогда из (28) имеем

$$\frac{1}{2} a(t) + \frac{1}{2} b(t) \leq C \left( 1 + \sqrt{a(t)} + \int_0^t a(\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau) d\tau \right). \quad (29)$$

Поскольку  $C\sqrt{a(t)} \leq C^2 + \frac{a(t)}{4}$ , то из (29) следует

$$a(t) + b(t) \leq C \left( 1 + \int_0^t a(\tau) d\tau + \int_0^t b(\tau) d\tau \right).$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла выводим  $a(t) \leq C, b(t) \leq C$  для всех  $t \in [0, T]$ , где  $C$  — некоторая положительная постоянная. Возвращаясь к неравенству (27), получаем следующую серию оценок

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{s(t)} \rho(x, t) u^2(x, t) dx \leq C, \quad (30)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^{s(t)} \rho(x, t) \theta(x, t) dx \leq C, \quad (31)$$

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} \left( \kappa A \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} + \frac{u_x^2}{\varphi} \right) dx d\tau \leq C. \quad (32)$$

Оценки (30), (31) дают оценку полной энергии.

**Оценки сверху и снизу для плотности и температуры снизу**

**Лемма 7.** *Существует постоянная  $M_1 > 0$ , зависящая от граничных данных, и  $T$ , такая, что*

$$\max_{(x,t) \in \Omega_T} \rho(x,t) \leq M_1. \quad (33)$$

*Доказательство.* Из леммы 2 и оценок (30), (31) следует ограниченность функции  $B(x,t)$ . Тогда из неравенства (18) леммы 4 следует утверждение леммы 7.

**Лемма 8.** *Существует постоянная  $m_2 > 0$ , зависящая от граничных данных и  $T$ , такая, что*

$$\min_{(x,t) \in \Omega_T} \theta(x,t) \geq m_2. \quad (34)$$

*Доказательство.* Запишем уравнение для температуры (3) в следующей форме

$$\rho(\theta_t + u\theta_x) = \kappa\theta_{xx} + \mu \left( u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu} \right)^2 - \frac{R^2\rho^2\theta^2}{4\mu}.$$

Разделив на  $\rho\theta^2$ , получим в области  $\Omega_T$  уравнение для функции  $q(x,t) = 1/\theta(x,t)$

$$q_t + uq_x - \frac{\kappa}{\rho}q_{xx} = \frac{R^2\rho}{4\mu} - \left[ \frac{2\kappa}{\rho}\theta q_x^2 + \frac{\mu}{\rho}q^2 \left( u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

Перейдем от функции  $q(x,t)$  к новой функции  $v(x,t)$ , связанной с ней равенством

$$q(x,t) = v(x,t)e^t.$$

Функция  $v(x,t)$  удовлетворяет вследствие (35) уравнению

$$v_t + uv_x - \frac{\kappa}{\rho}v_{xx} + v = \frac{R^2\rho}{4\mu}e^{-t} - \left[ \frac{2\kappa}{\rho}\theta v_x^2 e^t + \frac{\mu}{\rho}v^2 e^t \left( u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu} \right)^2 \right].$$

В силу леммы 7 и неотрицательности слагаемых в квадратной скобке для функции  $v(x,t)$  имеем дифференциальное неравенство

$$v_t + uv_x - \frac{\kappa}{\rho}v_{xx} + v \leq Ce^{-t}. \quad (36)$$

Предположим, что положительный максимум функции  $v(x,t)$  достигается в какой-нибудь внутренней точке  $(x_0, t_0)$  в области  $\Omega_T$  или при  $t_0 = T$ . Тогда в этой точке

$$v_t \geq 0, v_x = 0, v_{xx} \leq 0. \quad (37)$$

В силу (36), (37) получаем оценку

$$\max_{(x,t) \in \Omega_T} v(x,t) \leq Ce^{-t_0} \leq C.$$

Следовательно, для всех  $(x,t) \in \Omega_T$  справедливы неравенства

$$\frac{q(x,t)}{e^t} \leq C, \quad q(x,t) \leq Ce^t \leq Ce^T, \quad \frac{1}{\theta(x,t)} \leq Ce^T$$

или

$$\theta(x,t) \geq m_2 = \frac{1}{Ce^T}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Существует постоянная  $m_1 > 0$ , зависящая от граничных данных и  $T$ , такая, что*

$$\min_{(x,t) \in \Omega_T} \rho(x,t) \geq m_1.$$

Доказательство. Из оценок (24), (32) выводим

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx d\tau \leq C. \quad (38)$$

Из леммы 4 и оценки  $|B(x, t)| \leq C$  с учетом (24) имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)} &\leq C \left( 1 + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x, \tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq C \left( 1 + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} A(x, \tau) \varphi(x, \tau) d\tau \right) \leq C + CM \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \varphi(x, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= (\sqrt{\varphi(x, t)})^2 \leq \left( 1 + \int_0^{s(t)} |(\sqrt{\varphi})_x| dx \right)^2 \leq \left( 1 + \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \left| \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi}} \right| dx \right)^2 \leq \\ &\leq \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \int_0^{s(t)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx \right)^{1/2} \left( \int_0^{s(t)} \varphi dx \right)^{1/2} \right]^2 \leq 2 \left( 1 + \int_0^{s(t)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx \int_0^{s(t)} \varphi dx \right), \\ \int_0^{s(t)} \varphi(x, t) dx &= \int_0^{s(t)} \frac{\rho\theta}{\rho A} dx \leq \frac{1}{m} \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)} \int_0^{s(t)} \rho\theta dx \leq C \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)}, \end{aligned}$$

из (38) и (39) выводим неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)} \leq C + C \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \frac{1}{\rho(x, \tau)} d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем утверждение леммы 9. При доказательстве леммы 9 были получены оценки

$$\begin{aligned} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta(x, \tau) d\tau &\leq C + C \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \frac{1}{\rho(x, \tau)} d\tau, \\ \int_0^{s(t)} \varphi(x, t) dx &\leq C \max_{0 \leq x \leq s(t)} \frac{1}{\rho(x, t)}, \end{aligned}$$

откуда вытекают оценки

$$\int_0^T \max_{0 \leq x \leq s(t)} \theta(x, t) dt \leq C, \quad (40)$$

$$\int_0^{s(t)} \theta(x, t) dx = \int_0^{s(t)} A(x, t) \varphi(x, t) dx \leq M \int_0^{s(t)} \varphi(x, t) dx \leq C, \quad (41)$$

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} \theta^2(x, t) dx dt \leq \int_0^T \max_{0 \leq x \leq s(t)} \theta(x, t) \int_0^{s(t)} \theta(x, t) dx dt \leq C. \quad (42)$$

### Оценки производных

**Лемма 10.** *Существует постоянная  $C > 0$ , зависящая от граничных данных и  $T$ , такая, что*

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{s(t)} \rho(x, t) u^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^{s(t)} u_x^2(x, t) dx dt \leq C. \quad (43)$$

Доказательство. Умножим уравнение (2) на  $u(x, t)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$ , воспользуемся (1), (5) и (7):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \mu \int_0^{s(t)} u_x^2 dx - \int_0^{s(t)} R \rho \theta u_x dx = 0.$$

Используя неравенство Юнга с  $\varepsilon$  и интегрируя по  $t$ , выводим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \mu \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_x^2 dx d\tau \leq C_1 + \frac{R^2}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta^2 dx d\tau + \\ + \varepsilon \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_x^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым, применяя лемму 7 и неравенство (42), имеем

$$\int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_x^2 dx d\tau \leq C.$$

Лемма 10 доказана.

Как следствие лемм 9 и 10 получается оценка

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{s(t)} u^2(x, t) dx + \int_0^T \int_0^{s(t)} u_x^2(x, t) dx dt \leq C. \quad (44)$$

**Лемма 11.** Для любых  $t \in [0, T]$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} (u_\tau^2(x, \tau) + u_{xx}^2(x, \tau)) dx d\tau \leq \\ \leq C \left( 1 + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \max_{x \in [0, s(\tau)]} \theta^2(x, \tau) \int_0^{s(\tau)} \rho_x^2(x, \tau) dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Доказательство. Представим уравнение (2) в форме

$$\sqrt{\rho} u_t - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mu u_{xx} = -\sqrt{\rho} \mu u_x - R \sqrt{\rho} \theta_x - \frac{1}{\sqrt{\rho}} R \rho_x \theta.$$

Отсюда

$$\int_0^{s(t)} \left( \rho u_t^2 + \frac{1}{\rho} \mu^2 u_{xx}^2 - 2\mu u_t u_{xx} \right) dx = \int_0^{s(t)} \left( \sqrt{\rho} \mu u_x + R \sqrt{\rho} \theta_x + \frac{1}{\sqrt{\rho}} R \rho_x \theta \right)^2 dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \rho u_t^2 dx + \mu^2 \int_0^{s(t)} \frac{1}{\rho} u_{xx}^2 dx - 2\mu u_t(s(t), t) u_x(s(t), t) + \\ + \mu \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} u_x^2 dx - \mu \frac{ds(t)}{dt} u_x^2(s(t), t) \leq 3 \int_0^{s(t)} \left( \rho u^2 u_x^2 + R^2 \rho \theta_x^2 + \frac{1}{\rho} R^2 \rho_x^2 \theta^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (46)$$

Поскольку  $u(s(t), t) = 0$ , то

$$u_x(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} = -u_t(s(t), t),$$

и из (46) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} \rho u_t^2 dx + \mu^2 \int_0^{s(t)} \frac{1}{\rho} u_{xx}^2 dx + \mu \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} u_x^2 dx + \mu \frac{ds(t)}{dt} u_x^2(s(t), t) \leq \\ \leq 3 \int_0^{s(t)} \left( \rho u^2 u_x^2 + R^2 \rho \theta_x^2 + \frac{1}{\rho} R^2 \rho_x^2 \theta^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Для оценки  $u_x^2(x, t)$  имеем

$$u_x^2(x, t) \leq u_x^2(x_0, t) + \int_{x_0}^x |(u_x^2)_x| dx \leq u_x^2(x_0, t) + \int_0^{s(t)} |(u_x^2)_x| dx = u_x^2(x_0, t) +$$

$$+2 \int_0^{s(t)} |u_x u_{xx}| dx.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  проинтегрируем последнее неравенство по  $x_0$  от 0 до  $s(t)$

$$\begin{aligned} u_x^2(x, t) &\leq \frac{1}{s(t)} \int_0^{s(t)} u_x^2(x, t) dx + 2 \int_0^{s(t)} |u_x u_{xx}| dx \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{s_0} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_0^{s(t)} u_x^2 dx + \varepsilon \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Учитывая (48), неотрицательность слагаемого  $\mu \frac{ds(t)}{dt} u_x^2(s(t), t)$  и оценку

$$\int_0^{s(t)} \rho u^2 u_x^2 dx \leq C \max_{0 \leq x \leq s(t)} u_x^2(x, t) \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} u_x^2 dx + C\varepsilon \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 dx,$$

лемму 10 и ограниченность сверху и снизу  $\rho(x, t)$ , из (47) получим, при соответствующем выборе  $\varepsilon > 0$ , оценку (45).

**Лемма 12.** Для любых  $t \in [0, T]$  справедливо неравенство

$$\int_0^{s(t)} \rho_x^2(x, t) dx \leq C + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\theta_x^2}{\theta} dx d\tau + C\varepsilon \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{xx}^2 dx d\tau.$$

**Доказательство.** Из уравнения (1) имеем

$$(\ln \rho)_t + u(\ln \rho)_x + u_x = 0.$$

Тогда уравнение (2) можно записать в форме

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = -\mu[(\ln \rho)_t + u(\ln \rho)_x]_x - p_x.$$

Отсюда

$$\rho \left[ \left( u + \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} \right)_t + u \left( u + \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} \right)_x \right] + p_x = 0.$$

Умножим полученное равенство на  $(u + \mu \rho_x / \rho^2)$  и проинтегрируем по  $x$  в пределах от 0 до  $s(t)$ , тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho \left( u + \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \frac{ds(t)}{dt} \rho \left( u + \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} \right)^2 \Big|_{x=s(t)} + \\ &+ \frac{1}{2} \rho u \left( u + \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} \right)^2 \Big|_{x=0} - \int_0^{s(t)} R \rho \theta u_x dx + R \rho \theta u \Big|_{x=0}^{x=s(t)} + \int_0^{s(t)} (R \rho \theta)_x \mu \frac{\rho_x}{\rho^2} dx = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $u = 0$  при  $x = s(t)$  и  $x = 0$ , то последнее равенство примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \left( \rho u^2 + 2\mu \frac{u \rho_x}{\rho} + \mu^2 \frac{\rho_x^2}{\rho^3} \right) dx - \int_0^{s(t)} R \rho \theta u_x dx + R \mu \int_0^{s(t)} \frac{\theta \rho_x^2}{\rho^2} dx + \\ &+ R \mu \int_0^{s(t)} \frac{\theta_x \rho_x}{\rho} dx - \frac{\mu^2}{2} \frac{ds}{dt} \frac{\rho_x^2}{\rho^3} \Big|_{x=s(t)} = 0. \end{aligned}$$

Используя лемму 7, третье слагаемое слева заменим на меньшее

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \left( \rho u^2 + 2\mu \frac{u \rho_x}{\rho} + \mu^2 \frac{\rho_x^2}{\rho^3} \right) dx - \int_0^{s(t)} R \rho \theta u_x dx + \frac{R \mu}{M_1^2} \int_0^{s(t)} \theta \rho_x^2 dx + \\ &+ R \mu \int_0^{s(t)} \frac{\theta_x \rho_x}{\rho} dx - \frac{\mu^2}{2} \frac{ds}{dt} \frac{\rho_x^2}{\rho^3} \Big|_{x=s(t)} \leq 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Оценим некоторые слагаемые. Из уравнения (1) при  $x = s(t)$ , используя (5), (7), получим соотношение

$$\rho_t(s(t), t) = -\rho_2(t) u_x(s(t), t).$$

С другой стороны, дифференцируя (7) по  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} \rho_x(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} + \rho_t(s(t), t) &= \frac{d\rho_2(t)}{dt}, \\ \rho_x(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d\rho_2(t)}{dt} + \rho_2(t)u_x(s(t), t). \end{aligned}$$

Тогда, используя условие (9), выводим

$$\begin{aligned} \rho_x^2(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} &= \left( \frac{d\rho_2(t)}{dt} + \rho_2(t)u_x(s(t), t) \right)^2 \frac{1}{ds(t)/dt} \leq \\ &\leq 2 \left( \frac{d\rho_2(t)}{dt} \right)^2 \frac{1}{m} + \frac{2M^2}{m} u_x^2(s(t), t) \leq C (1 + u_x^2(s(t), t)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (48), получим

$$\rho_x^2(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt} \leq C + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} u_x^2 dx + \varepsilon C \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 dx.$$

Таким образом,

$$\frac{\mu^2}{2} \frac{ds(t)}{dt} \frac{\rho_x^2(s(t), t)}{\rho^3(s(t), t)} \leq C + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} u_x^2 dx + \varepsilon C \int_0^{s(t)} u_{xx}^2 dx.$$

Учитывая ограниченность сверху и снизу  $\rho(x, t)$ , (40), (42), лемму 10 и следующие оценки

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} R\rho\theta u_x dx d\tau &\leq C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta^2 dx d\tau + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_x^2 dx d\tau \leq C, \\ -R\mu \int_0^{s(t)} \frac{\theta_x \rho_x}{\rho} dx &\leq \frac{C}{\varepsilon_1} \int_0^{s(t)} \frac{\theta_x^2}{\theta} dx + \varepsilon_1 C \int_0^{s(t)} \theta \rho_x^2 dx, \\ -\mu \int_0^{s(t)} \frac{u \rho_x}{\rho} dx &\leq \frac{C}{\varepsilon_2} \int_0^{s(t)} u^2 dx + \varepsilon_2 C \int_0^{s(t)} \rho_x^2 dx, \end{aligned}$$

интегрируя (49) по времени, получим, при соответствующем выборе  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , утверждение леммы 12.

### Оценка температуры

**Лемма 13.** *Существует постоянная  $C > 0$ , такая, что для любых  $t \in [0, T]$  справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^{s(\tau)} \theta^2 dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2 dx d\tau \leq C.$$

**Доказательство.** Запишем уравнение для энергии  $\theta + \frac{1}{2}u^2$ . Для этого умножим уравнение (2) на  $u$  и сложим с (3), в итоге получим

$$\rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)_t + \rho u \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)_x = \mu (u_x u)_x + \kappa \theta_{xx} - (R\rho\theta u)_x. \quad (50)$$

Умножим (50) на

$$\theta + \frac{u^2}{2} - \frac{x\theta_2(t)}{s(t)} - \left( 1 - \frac{x}{s(t)} \right) \theta_1(t),$$

и проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) \theta_2^2(t) - \\ &- \frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right) \left[ \frac{x\theta_2(t)}{s(t)} + \left( 1 - \frac{x}{s(t)} \right) \theta_1(t) \right] dx + \\ &+ \frac{ds(t)}{dt} \rho_2(t) \theta_2^2(t) + \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right) \left[ \frac{x\theta_2(t)}{s(t)} + \left( 1 - \frac{x}{s(t)} \right) \theta_1(t) \right]_t dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} \rho u \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right) dx = \\
= & -\mu \int_0^{s(t)} uu_x \theta_x dx - \mu \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx + \mu \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} uu_x dx - \\
& -\kappa \int_0^{s(t)} \theta_x^2 dx - \kappa \int_0^{s(t)} uu_x \theta_x dx + \kappa \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{s(t)} (\theta_2(t) - \theta_1(t)) + \\
& + R \int_0^{s(t)} \rho \theta u \theta_x dx + R \int_0^{s(t)} \rho \theta u^2 u_x dx - \\
& - R \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} \rho \theta u dx. \tag{51}
\end{aligned}$$

Оценим некоторые слагаемые, входящие в (51):

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{s(t)} \int_0^{s(t)} \rho u \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right) dx & \leq C \int_0^{s(t)} u^2 dx + C \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx, \\
\int_0^{s(t)} uu_x \theta_x dx & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx + \varepsilon \int_0^{s(t)} \theta_x^2 dx, \\
R \int_0^{s(t)} \rho \theta u \theta_x dx & \leq \frac{R}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx + \varepsilon R \int_0^{s(t)} \theta_x^2 dx, \\
R \int_0^{s(t)} \rho \theta u^2 u_x dx & \leq R \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx + R \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx.
\end{aligned}$$

Остальные слагаемые оцениваются очевидным образом. Интегрируя (51) по времени, получим неравенство

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2 dx d\tau & \leq C + M_3 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u^2 u_x^2 dx d\tau + \\
+ C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx d\tau + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx d\tau, \tag{52}
\end{aligned}$$

где  $C, M_3$  — положительные постоянные, зависящие от  $T$ , начальных и краевых данных.

Умножим (2) на  $4u^3$ , проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $s(t)$  и воспользуемся (1)

$$\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho u^4 dx + 12\mu \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx = 12R \int_0^{s(t)} \rho \theta u^2 u_x dx.$$

Применим неравенство Коши к правой части

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{s(t)} \rho u^4 dx + 12\mu \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx & \leq \\
\leq 6\mu \int_0^{s(t)} u^2 u_x^2 dx + \frac{6R^2}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx. \tag{53}
\end{aligned}$$

Интегрируя (53) по времени, имеем

$$\int_0^{s(t)} \rho u^4 dx + 6\mu \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u^2 u_x^2 dx d\tau \leq C + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx d\tau. \tag{54}$$

Умножим (54) на  $M_3/\mu$  и сложим с (52)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int_0^{s(t)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2 dx d\tau + \frac{M_3}{\mu} \int_0^{s(t)} \rho u^4 dx + \\
+ 5M_3 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u^2 u_x^2 dx d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx d\tau + C \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho \left( \theta + \frac{u^2}{2} \right)^2 dx d\tau. \quad (55)$$

Далее нам понадобятся оценки:

$$\begin{aligned} \theta^2(x, t) &= \theta_1^2(t) + \int_0^x (\theta^2)_x dx \leq \theta_1^2(t) + 2 \int_0^{s(t)} |\theta \theta_x| dx \leq \\ &\leq \theta_1^2(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{s(t)} \theta^2 dx + \varepsilon \int_0^{s(t)} \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по времени, используя (42), имеем

$$\int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta^2(x, \tau) d\tau \leq C(\varepsilon) + \varepsilon \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2 dx d\tau. \quad (56)$$

Тогда, используя (44) и (56), оценим

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \rho^2 \theta^2 u^2 dx d\tau &\leq M_1^2 \int_0^t \left[ \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta^2(x, \tau) \int_0^{s(\tau)} u^2(x, \tau) dx \right] d\tau \leq \\ &\leq M_1^2 \max_{0 \leq \tau \leq t} \int_0^{s(\tau)} u^2(x, \tau) dx \cdot \int_0^t \max_{0 \leq x \leq s(\tau)} \theta^2(x, \tau) d\tau \leq \\ &\leq C + C\varepsilon \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_x^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Используя последнюю оценку при соответствующем выборе  $\varepsilon$ , применяя неравенство Гронуолла, из (55) получим утверждение леммы.

**Лемма 14.** *Существуют постоянные  $C_1, C_2, C_3, M_2 > 0$ , зависящие от  $T$ , начальных и краевых данных, такие, что для любых  $t \in [0, T]$  справедливы следующие оценки*

$$\int_0^{s(t)} u_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{xx}^2 dx d\tau \leq C_1, \quad (57)$$

$$\int_0^{s(t)} \rho_x^2(x, t) dx + \int_0^{s(t)} \rho_t^2(x, t) dx \leq C_2,$$

$$\int_0^{s(t)} \theta_x^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_\tau^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^{s(\tau)} \theta_{xx}^2 dx d\tau \leq C_3, \quad (58)$$

$$\max_{(x,t) \in \Omega_T} \theta(x, t) \leq M_2. \quad (59)$$

**Доказательство.** Если учесть ограниченность  $\theta(x, t)$  снизу, то с использованием леммы 13 имеем

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\theta_x^2}{\theta} dx d\tau \leq C.$$

Подставляя последнюю оценку в утверждение леммы 12, получим

$$\int_0^{s(t)} \rho_x^2(x, t) dx \leq C + C\varepsilon \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{xx}^2 dx d\tau. \quad (60)$$

Теперь оценка (57) получается из леммы 11 с использованием (56), (60) и оценки леммы 13.

Из (60) и (57) имеем для всех  $t \in [0, T]$

$$\int_0^{s(t)} \rho_x^2(x, t) dx \leq C.$$

Из уравнения (1) следует для всех  $t \in [0, T]$

$$\int_0^{s(t)} \rho_t^2(x, t) dx \leq C.$$

Оценки (58), (59) получаются из уравнения (3) стандартным образом с использованием уже полученных оценок для  $\rho$  и  $u$ .

Оценки теоремы в гильберовских нормах, после того как доказаны априорные оценки лемм 1–14, получаются методами, изложенными в [25].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Serrin *On the uniqueness of compressible fluid motion* // Arch. Rational Mech. Anal. 1959. V. 3, №3. P. 271–288.
2. D. Graffi *Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi compressibili* // J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. P. 99–106.
3. J. Nash *Le probleme de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general* // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90. P. 487–497.
4. N. Itaya *The existence and unicueness of the solution of the equations describing compressible viscous fluid flow* // Proc. Japan Acad. 1970. V. 46, №4. P. 379–382.
5. Вольперт А.И., Худяев С.И. *О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений* // Мат. сборник. 1972. Т. 87, №4. С. 504–528.
6. Солонников В.А. *О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости* // В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 6. Л.: Наука. 1976. С. 128–142. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. Т. 56).
7. A. Tani *On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1977. V. 13, №1. P. 193–253.
8. Канель Я.И. *Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, №4. С. 721–734.
9. N. Itaya *On the temporally global problem of the generalized Burgers equation* // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14, №1. P. 129–177.
10. N. Itaya *A servey on the generalized Burger's equation with a pressure model term* // J. Math. Kyoto Univ. 1976. V. 16, №1. P. 223–240.
11. A. Tani *On the first initial-boundary value problem of the generalized Burgers equation* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1974. V. 10, №1. P. 209–233.
12. Кажихов А.В. *О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 24. С. 45–61.
13. Кажихов А.В. *Некоторые вопросы теории уравнений Навье-Стокса сжимаемой жидкости* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 38. С. 33–47.
14. Кажихов А.В. *К теории краевых задач для уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 37–62.
15. Кажихов А.В. *О задаче Коши для уравнений вязкого газа* // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, №1. С. 60–64.
16. Кажихов А.В., Шелухин В.В. *Однозначная разрешимость "в целом" по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа* Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, №2. С. 282–291.
17. Шелухин В.В. *Периодические течения вязкого газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 42. С. 80–102.
18. Шелухин В.В. *Существование периодических решений обобщённой системы Бюргера* // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 992–997.

19. Шелухин В.В. *Ограниченные, почти периодические решения уравнений вязкого газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 44. С. 147–162.
20. Белов С.Я. *Разрешимость "в целом" задачи протекания для уравнений Бюргера сжимаемой жидкости* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 3–14.
21. Вайгант В.А. *Неоднородные граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 97. С. 3–21.
22. Вайгант В.А. *Проблема существования глобальных решений уравнений Навье-Стокса сжимаемых сплошных сред*: Дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Барнаул: Алтайский гос. ун-т, 1998.
23. Кажихов А.В., Калиев И.А. *Корректность одной модели фазового перехода газ - твердое тело*. Новосибирск, 1999. 32 с. (Препр. / Мин. ОПО РФ. НГУ, НИИ Дискретной математики и информатики. №43).
24. I.A. Kaliev, A.V. Kazhikhov *Well-posedness of a gas-solid phase transition problem* // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, №3. P. 282–308.
25. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
26. Калиев И.А., Подкуйко М.С. *Об одной граничной задаче для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических убывающих со временем областях* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №10. С. 1356–1374.
27. I.A. Kaliev, M.S. Podkuiko *Nonhomogeneous Boundary Value Problems for Equations of Viscous Heat-Conducting Gas in Time-Decreasing Non-Rectangular Domains* // J. Math. Fluid Mech. 2008. V. 10, №2. P. 176–202.

Ибрагим Адиевич Калиев,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
проспект Ленина, 47а,  
453103, г. Стерлитамак, Россия  
E-mail: kalievia@mail.ru

Андрей Александрович Шухардин,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
проспект Ленина, 47а,  
453103, г. Стерлитамак, Россия  
E-mail: shukhardinaa@gmail.com

Гульнара Сагындыковна Сабитова,  
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,  
проспект Ленина, 47а,  
453103, г. Стерлитамак, Россия  
E-mail: sabitovags@mail.ru