ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 17. № 1 (2025). С. 25-61.

УДК 517.956.225+517.956.8+517.956.227

РАЗНЫЕ ТИПЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТОНКИХ МНОГОГРАННИКАХ

С.А. НАЗАРОВ

Аннотация. Построена асимптотика собственных пар смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в тонком многограннике с параллельными сближенными основаниями и скошенными узкими боковыми гранями. На основаниях назначены условия Дирихле, а на боковых гранях — условия Дирихле или Неймана, распределение которых по граням, а также углы наклона последних оказывают существенное влияние на поведение собственных функций при истончении области. Обнаружены ситуации, в которых собственные функции распределены вдоль всего многогранника и локализованы около его боковых граней или вершин. Результаты основаны на анализе спектра (точка отсечки, изолированные собственные числа, пороговые резонансы и пр.) вспомогательных задач в полуполосе и четверти слоя со скошенными торцом и боковыми сторонами соответственно. Сформулированы открытые вопросы, относящиеся как к спектральному, так и асимптотическому анализу.

Ключевые слова: оператор Лапласа, смешанная краевая задача в тонком многограннике, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций, существенный и дискретный спектры задач в бесконечных областях

Mathematics Subject Classification: 35J05

1. Введение

1.1. Прелюдия. Собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в «сплющенном пирамидальном» многограннике локализуются около вершины, наиболее удалённой от плоского основания (рис. 1). Этот результат, полученный в статье [1], примыкает к результатам работ [2]–[6], относящимся к тонким областям переменной толщины. В данной работе исследуются собственные функции смешанной краевой задачи в тонких многогранниках с параллельными основаниями и скошенными узкими боковыми гранями (рис. 2, а, и 3, а). На основаниях назначены условия Дирихле, а на боковых гранях — условия Дирихле или Неймана, в зависимости от расположения которых реализуется тот или иной способ локализации собственных функций, а также её отсутствие. Именно, будут указаны ситуации, в которых несколько первых собственных функций сконцентрированы соответственно около краёв или углов тонкой пластины, а также распределены по всей пластине. Отсутствие концентрации собственных функций или её характеристики определятся свойствами спектров (наличие изолированных собственных чисел и пороговых резонансов) модельных задачах о заостренной полубесконечной полосе (далее полуполосе) или четверти слоя с наклонной боковой поверхностью, рассмотренными в §2. Если

S.A. Nazarov, Different types of localization for eigenfunctions of scalar mixed boundary value problems in thin polyhedra.

Исследование С.А. Назарова выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 22-11-00046.

Поступила 5 января 2024 г.

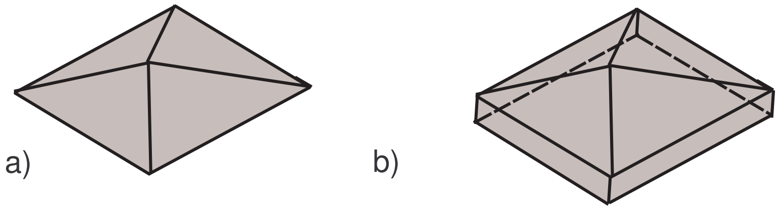

Рис. 1. Пирамидальные многогранники

плоская задача уже была изучена в полном объёме (см. [7]–[9] и др.), то для пространственной задачи известные результаты фрагментарные (см. [10]–[12]), и далее для полноты картины выбирается геометрическая форма (рис. 3), которая нуждается в независимом исследовании и, в частности, позволяет указать новые приёмы анализа дискретного спектра.

Выбор конкретных тонких многогранников обусловлен возможностью составления из них тонкостенных короба и куба[1] (рис. 2, b, и 4, b). Следует подчеркнуть, что тонкостенные конструкции встречаются абсолютно повсюду, однако полноценных исследований их не проводилось. Скалярные задачи Неймана весьма просты, а векторные задачи теории упругости чрезвычайно сложны. Рассмотренные в статье [12] и в данной работе скалярная задачи Дирихле занимают промежуточное положение. Отметим, что эффект локализации в конструкциях из [12] в первую очередь достигался путём вариации толщин отдельных элементов (перегородок), но коробу (рис. 2, b) он свойственен при одинаковых толщинах всех стенок и возникает благодаря наклону стенок с условиями Неймана во вспомогательном многограннике (рис. 2, a), причём удалось обнаружить и, что важно, строго обосновать эффект рёберной локализации собственных функций (он лишь обсуждался [12]). Наконец, результаты [10], [11] позволяют по изложенной в §5 схеме проверить, что первые восемь собственных функций задачи Дирихле на тонкостенном кубе (рис. 3) концентрируются около его вершин.

1.2. Постановка первой группы задач. Спектральная смешанная краевая задача

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{1.1}$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon_D, \tag{1.2}$$

$$\partial_{\nu(x)} u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon_N := \partial\Omega^\varepsilon \setminus \overline{\Gamma^\varepsilon_D}, \tag{1.3}$$

поставлена в тонком (ε — малый положительный параметр) многограннике (рис. 1, a)

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (y, z) : y_1 = x_1 \in (-1, 1), |y_2| = |x_2| < 1 - z, z = x_3 \in (0, \varepsilon)\}. \tag{1.4}$$

При этом $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, $\partial_\nu = \partial_{\nu(x)}$ — производная вдоль внешней нормали и

$$\Gamma^\varepsilon_N = \{x \in \partial\Omega^\varepsilon : z \in (0, \varepsilon)\} \tag{1.5}$$

или

$$\Gamma^\varepsilon_D = \{x \in \partial\Omega^\varepsilon : |y_1| < 1\}. \tag{1.6}$$

В первом случае условия Неймана назначены на всей боковой поверхности многогранника Ω^ε, а во втором — только на двух узких гранях

$$\Gamma^\varepsilon_{\sharp\pm} = \{x \in \Omega^\varepsilon : y_1 = \pm 1, |y_2| < 1, z \in (0, \varepsilon)\}, \tag{1.7}$$

перпендикулярных оси абсцисс. Нижним основанием многогранника (1.4) служит квадрат $\square_1 = (-1, 1)^2$.

[1] С некоторой натяжкой их можно интерпретировать как фрагменты пространственных квантовых волноводов; ср. монографию [13].

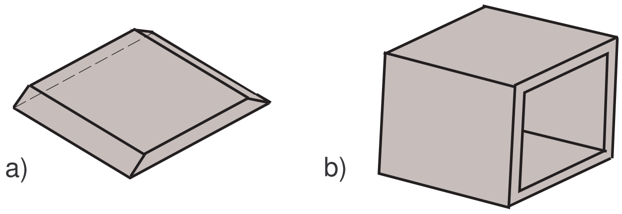

Рис. 2. Тонкий многогранник (a) и сооружённый из четырёх многогранников короб (b)

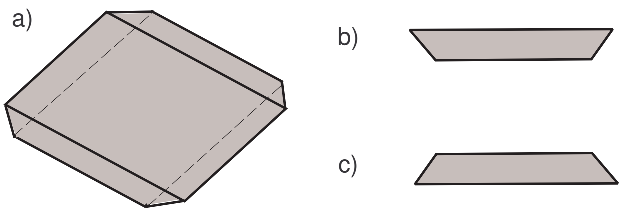

Рис. 3. Тонкий многогранник, у которого боковые грани скошены поразному (a), и его сечения, перпендикулярные осям ординат (b) и абсцисс (c)

1.3. Первая группа асимптотических результатов. Одна из целей работы — построить асимптотику при $\varepsilon \to +0$ собственных чисел

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leqslant \lambda_3^\varepsilon \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m^\varepsilon \leqslant \cdots \to +\infty \tag{1.8}$$

и соответствующих собственных функций $u_1^\varepsilon,\ u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \ldots, u_m^\varepsilon, \ldots \in H_0^1(\Omega^\varepsilon; \Gamma_D^\varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3), вариационная формулировка которой апеллирует к интегральному тождеству [14], [15]

$$\left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon\right)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^h (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \qquad \forall \psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon; \Gamma_D^\varepsilon). \tag{1.9}$$

Здесь $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\Omega^\varepsilon}$ — естественное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^\varepsilon)$, скалярном или векторном, а $H_0^1(\Omega^h; \Gamma_D^\varepsilon)$ — пространство Соболева функций, удовлетворяющих условию Дирихле (1.2).

Пары $\{\lambda^\varepsilon; u_m^\varepsilon\}$ называем собственными парами задачи (1.1)–(1.3). Первое собственное число простое, а соответствующую собственную функцию можно зафиксировать положительной в $\Omega^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon$.

В ситуации (1.6) собственные числа допускают простое асимптотическое представление

$$\lambda_{(p,q)}^\varepsilon = \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{4}\left(p^2 + q^2\right) + \widetilde{\lambda}_{(p,q)}^\varepsilon, \tag{1.10}$$

где $\widetilde{\lambda}_{(p,q)}^\varepsilon$ — малый остаток (см. п. 5, §3). Разумеется, собственные числа (1.10), занумерованные двумя индексами $q \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ и $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, нужно перегруппировать в монотонную последовательность (1.8). Собственные функции принимают вид

$$u_{(p,q)}^\varepsilon(x) = \sin\left(\pi\frac{z}{\varepsilon}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}p(y_1 - 1)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}q(y_2 - 1)\right) + \widetilde{u}_{(p,q)}^\varepsilon(x), \tag{1.11}$$

с малым остатком $\widetilde{u}_{(p,q)}^\varepsilon$ (см. п. 5, §3). Нетрудно усмотреть, что главные члены формул (1.10) и (1.11) образуют собственные пары задачи (1.1)–(1.3) в параллелепипеде $\Omega_\square^\varepsilon = \square_1 \times (0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$, где возможно разделение переменных.

Совершенно другое асимптотическое строение приобретают собственные пары задачи (1.1)–(1.3) в случае постановки условий Неймана на всей боковой поверхности (1.5) (см.

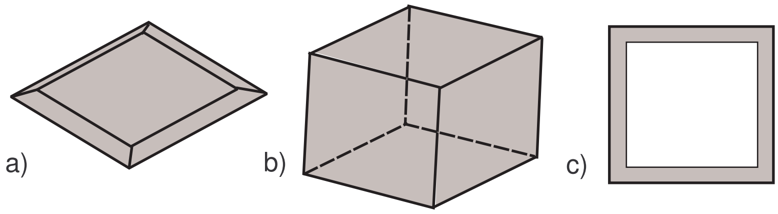

Рис. 4. Тонкая усеченная пирамида (a), сооружённый из шести пирамид тонкостенный куб (b) и его центральное сечение (c)

п. 1 и п. 4, §4), а именно,

$$\lambda^{\varepsilon}_{(p,j)} = \frac{\Lambda_1}{\varepsilon^2} + \frac{\pi^2}{4}p^2 + \widetilde{\lambda}^{\varepsilon}_{(k,j)}, \tag{1.12}$$

$$u^{\varepsilon}_{(p,j)}(x) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\pm} K^{\pm}_{p,j} W_1\Big(\frac{1\mp y_2}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{2}p(y_1-1)\Big) + \widetilde{u}^{\varepsilon}_{(k,j)}(x), \tag{1.13}$$

где $K^{\pm}_{k,j}$ — некоторые коэффициенты, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ и $p \in \mathbb{N}_0$, а $\Lambda_1 \in (\pi^2/2, \pi^2)$ — собственное число и отвечающая ему экспоненциально затухающая на бесконечности собственная функция $W_1 \in H^1(\Pi)$ (см. п. 1, §2) вспомогательной задачи (2.1)–(2.3) на заостренной полуполосе

$$\Pi = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 : \eta_2 \in (0,1), \eta_1 > \eta_2\}. \tag{1.14}$$

Множество $(-1,1)\times\Pi$ получается в результате формального перехода к $\varepsilon = 0$ после следующего растяжения ординаты и аппликаты:

$$x \quad\mapsto\quad (y_1, \eta^{\pm}_1, \eta^{\pm}_2) = \Big(y_1, \frac{1\mp y_2}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\Big). \tag{1.15}$$

Благодаря определению (1.4) результат не зависит от индекса $\pm$ грани

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\pm} = \{x : |y_1| < 1, \pm y_2 = 1 - z, z \in (0,\varepsilon)\}. \tag{1.16}$$

Собственные функции (1.13) локализованы в малой окрестности узких граней (1.16) и исчезают с экспоненциальной скоростью при удалении от них (см. п. 3 §4).

Подчеркнём, что обе формулы (1.11) и (1.13) предоставляют лишь какие-то — ненормированные — собственные функции, но в следующих параграфах считаем, что выполнены условия ортогональности и нормировки

$$\big(u^{\varepsilon}_j, u^{\varepsilon}_k\big)_{\Omega^{\varepsilon}} = \delta_{j,k}, \quad j,k \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

1.4. Краткий обзор известных форм. Изучению эффекта локализации собственных функций краевых задач посвящена обширная литература (см. работы [1]–[6], [16]–[18], обзорную статью [19] и многие другие публикации). Как уже упоминалось, для тонких областей с условием Дирихле на одном или обоих основаниях концентрация собственных функций наблюдается около высоты с наибольшей длиной (рис. 2, a и b), однако известны формы областей, для которых обсуждаемый эффект проявляется иным способом (рис. 2, c–f)

Отметим, что в статье [20] обнаружен похожий эффект концентрации мод собственных колебаний цилиндрических упругих (однородных и изотропных) тонких плит с жёстко зафиксированными основаниями и узкой боковой поверхностью, свободной от внешних воздействий.

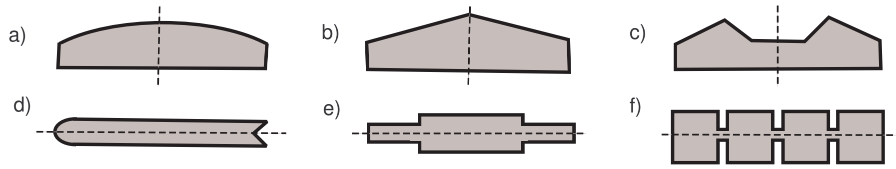

Рис. 5. Локализация около высоты наибольшей длины (a и b). Локализация около двух точек или окружности (после вращения сечения) (c), левого торца (d), на отрезке (e) и на одиночной ячейке (f). Штрих–пунктирной линией обозначены оси вращения при допустимом переходе от плоских к пространственным телам

В первую очередь выбор многогранника (1.4) обусловлен следующим наблюдением: нечётное в случае (1.5) и чётное в случае (1.6) продолжение собственной функции с горизонтальной стенки через грани (1.16) и повторение этой процедуры для двух образованных вертикальных стенок даёт отвечающую тому же собственному числу собственную функцию смешанной краевой задачи в тонком коробе (рис. 1, b)

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \left(\square_1 \setminus \overline{\square_{1-\varepsilon}}\right) \times (-1,1), \tag{1.18}$$

где $\square_a = \{\eta = (\eta_1,\eta_2) \in \mathbb{R}^2 : |\eta_j| < a, j = 1,2\}$ — квадрат со стороной $2a$. При этом на внешней и внутренней боковых поверхностях короба $\{x \in \partial\mathcal{K}^\varepsilon : |y_1| < 1\}$ назначены условия Дирихле, а на торцах $\left(\square_1 \setminus \overline{\square_{1-\varepsilon}}\right) \times \{\pm 1\}$ — условия Неймана или Дириле. Полученные в §3 и §4 асимптотические формулы показывают, что у упомянутой задачи в тонкостенной конструкции (1.18) собственные функции могут приобретать совершенно различное поведение при $\varepsilon \to +0$, а именно, концентрироваться около ребер или проявляться всюду в коробе.

Обнаруженные способы распределения собственных функций возникают и в задаче Дирихле для оператора Лапласа в тонкостенном (полом) кубе

$$\mathcal{K}^\varepsilon \cup \left(\square_1 \times \left((-1,-1+\varepsilon) \cup (1-\varepsilon,1)\right)\right), \tag{1.19}$$

причём в нём проявляется в первую очередь иной, уже упомянутый в п. 1.1, способ локализации: первые восемь собственных функций сконцентрированы около вершин куба и затухают с экспоненциальной скоростью при удалении от них. Это свойство собственных функций выводится при помощи изложенного в §5 подхода на основе результатов [10], [11] о спектре задачи Дирихле в «слое Фикеры»

$$\bigcup_{j=1,2,3} \{\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) : \xi_j < 1, \quad \xi_k > 0, k = 1,2,3\},$$

названном по аналогии с известным многогранном углом Фикеры [21]. Для подробного описания причин такой — околовершинной — локализации в очередном пункте будет образовано тонкое тело (рис. 3, a), а в §2 проведён спектральный анализ — определение существенного спектра и проверка непустоты дискретного — модельной краевой задачи на четверти слоя с по–разному скошенными боковыми гранями

$$\Xi = \{\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3) : \xi_1 > -\xi_3, \xi_2 > \xi_3, \xi_3 \in (0,1)\}. \tag{1.20}$$

Подчеркнём, что дискретный спектр отсутствует у смешанной краевой задачи на четверти слоя

$$\Xi_\sqcup = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi_1 > 0, \xi_2 > \xi_3, \xi_3 \in (0,1)\} \tag{1.21}$$

с одной прямой гранью, а случай четверти слоя

$$\Xi_\wedge = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi_1 > \xi_3, \xi_2 > \xi_3, \xi_3 \in (0,1)\} \tag{1.22}$$

с одинаково скошенными боковыми гранями непосредственно связан с тонкостенным кубом (1.19), а наличие собственного числа в дискретном спектре смешанной краевой задачи на области (1.22) установлено в работе [11].

1.5. Усугубление эффекта локализации. Как упоминалось, рассматривается ещё одна область, в которой поставлена задача (1.1)–(1.3). Этот многогранник изображён на рис. 3 и задан равенством

$$\Omega^\varepsilon = \{x : |y_1| < 1 + z, |y_2| < 1 - z, z \in (0, \varepsilon)\}, \tag{1.23}$$

а множество, где назначено условие Неймана, имеет вид (1.5). Обращаем внимание на то, что в отличие от (1.4) пары граней (1.16) и (1.7) многогранника (1.23) расположены соответственно под углами $\pi/4$ и $3\pi/4$ к плоскости $\{x : z = 0\}$. У четверти слоя (1.20) углы наклона боковых граней такие же, но у четверти слоя (1.22) оба угла равны $\pi/4$.

В §5 будет продемонстрировано, что собственным функциям u_1^ε, …, u_4^ε, отвечающим первым четырём собственным числам из последовательности (1.8), свойственны концентрация в $c\varepsilon$–окрестностях коротких ребер, исходящих из точек

$$P^{\pm +} = (\pm 1, +1, 0), \qquad P^{\pm -} = (\pm 1, -1, 0), \tag{1.24}$$

и экспоненциальное затухание при удалении от них, а сами числа приобретают асимптотику

$$\lambda_k^\varepsilon = \varepsilon^{-2} M_1 + \widetilde{\lambda}_k^\varepsilon, \qquad k = 1, \dots, 4, \tag{1.25}$$

где $M_1 \in (0, \Lambda_1)$ — собственное число задачи (2.13) на бесконечной области (1.20) (см. п. 3 §2), а $\widetilde{\lambda}_k^\varepsilon$ — малый остаток (см. п. 2 §5). По указанным в п. 3 §5 причинам информации о собственных числах $\{\lambda_k^\varepsilon; u_k^\varepsilon\}$ при $k > 4$ у автора нет.

1.6. Предварительное описание результатов. В очередном параграфе изучаются спектральные смешанные краевые задачи в полуполосе (1.14) и четверти слоя (1.20). Если для плоской задачи все представленные в п. 1 §2 результаты известны, то для пространственной задачи приходится доказывать в п. 2–п. 4 §2 и формулу для существенного спектра (теорема 2.1), и непустоту дискретного спектра (теорема 2.2), и экспоненциальное затухание на бесконечности собственной функции (теорема 2.3). Подчеркнём, что перечисленные результаты представляют собой центральный момент работы и, как в статье [12], служат основой для выявления эффекта околовершинной локализации собственных функций. Впрочем, в п. 5 §2 перечисляются изъяны проведенного спектрального анализа пространственной задачи, препятствующие полному исследованию спектра задачи в многограннике (1.23), в частности, обсуждаются феномен порогового резонанса и его влияние на асимптотические структуры.

В §3 указаны асимптотические формулы для спектральных пар задачи (1.1)–(1.3) в ситуации (1.6), включающие спектральные пары задачи (3.3) в квадрате $\square_1$. Построение и обоснование асимптотики традиционны (ср., например, [22]–[25]), хотя переход от условий Неймана к условиям Дирихле и требует модификации процедур. Выкладки и рассуждения подробно изложены в §3 для удобства читателя и как предварительный материал для пояснения различий в построении и обосновании асимптотических формул в очередных параграфах при возникновении эффекта локализации. Сначала выстраивается формальная асимптотика, затем приводится классическая лемма 3.1 о «почти собственных» числах и векторах, которая используется для нахождения собственных чисел исходной задачи с построенной асимптотикой, и наконец, лемма 3.2 о сходимостях позволяет установить окончательные утверждения (теоремы 2.1 и 2.2) об асимптотических разложениях собственных пар $\{\lambda_m^\varepsilon; u_m^\varepsilon\}$.

В §4 исследуется спектр задачи (1.1)–(1.3) в ситуации (1.5), для которой характерна концентрация собственных функций около узких граней (1.16), что выражается кардинальным изменением асимптотических анзацев, включающих теперь собственную пару $\{\Lambda_1; W_1\}$ задачи (2.1)–(2.3), а также собственные пары $\{\mu_m; v_m\}$ задачи Неймана (4.1) для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $(-1,1) \ni y_1$. С одной стороны процедура обоснования асимптотики упрощается, так как путём постановки искусственных краевых условий на срединной плоскости $\{x : y_2 = 0\}$ тела Ω^ε собственные числа делаются простыми. С другой стороны доказательство леммы 4.1 о сходимостях потребовало значительной переработки материала из в п. 4 §3. Наконец, в п. 5 §4 указываются иные серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками, которые выстраиваются по тому же принципу, что и в §3, но с изменениями в аргументации постановки краевых условий на сторонах квадрата $\square_1$.

В §5 представлены асимптотические результаты, относящиеся к задаче (1.1)–(1.3) в области (1.23). Эффект околовершинной локализации происходит от обнаруженной п. 3 §2 точки M_1 дискретного спектра задачи (2.13) в четверти слоя (1.20). Наличие собственной пары $\{M_1; V_1\}$ совершенно упрощает асимптотические анзацы, а процедура обоснования также тривиализуется благодаря постановке искусственных краевых условий на двух плоскостях симметрии тела (1.23) — см. теорему 5.2 о собственных числах $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_4^\varepsilon$. Вместе с тем из-за неполноты спектрального анализа задачи (2.13) (ср. комментарии в п. 5 §2) получить информацию о собственных парах с номерами $m > 4$ не удалось. Другие открытые вопросы обсуждаются в п. 3 §5.

Приемы и результаты проведённого далее асимптотического анализа допускают разнообразные обобщения (разумеется, при понятных ограничениях), а именно, вариацию количества граней, растворов двугранных углов и распределения краевых условий (1.2) и (1.3), а также для скалярных уравнений второго порядка в дивергентной форме с гладкими коэффициентами, однако подобные обобщения оставлены без внимания для наглядности и упрощения асимптотических конструкций и конечно же для облегчения формулировок результатов.

2. Спектральные задачи в бесконечных областях

2.1. Вспомогательная плоская задача. В полуполосе (1.14) со скошенным торцом $\gamma = \{\eta : \eta_2 \in (0,1), \eta_1 = \eta_2\}$ и боковыми сторонами $\sigma^j = \{\eta : \eta_2 = j, \eta_1 > j\}$, $j = 0, 1$, рассмотрим задачу

$$-\Delta_\eta W(\eta) = \Lambda W(\eta), \quad \eta \in \Pi, \tag{2.1}$$

$$W(\eta) = 0, \quad \eta \in \sigma := \sigma^0 \cup \sigma^1, \tag{2.2}$$

$$\partial_{\nu(\eta)} W(\eta) = 0 \quad \textit{или} \quad W(\eta) = 0, \quad \eta \in \gamma. \tag{2.3}$$

Последние краевые условия обозначаем $(2.3)_N$ или $(2.3)_D$ соответственно.

Непрерывный спектр обеих задач — луч $[\pi^2, +\infty)$. Классический прием [26] показывает, что точеный спектр задачи Дирихле (2.1)–$(2.3)_D$ пустой.

Известно, что дискретный спектр смешанной краевой задачи (2.1)–$(2.3)_N$ состоит из единственной точки $\Lambda_1 \in (0, \pi^2)$ (приближённое значение $0,93\pi^2$ вычислено в работе [27], а в работах [7], [8], [16] строго установлены его существование и единственность). Соответствующая собственная функция $W_1 \in H_0^1(\Pi; \sigma)$ затухает на бесконечности со скоростью $O\big(e^{-\eta_1\sqrt{\pi^2-\Lambda_1}}\big)$ и допускает представление (см., например, [28, гл. 2])

$$W_1(\eta) = \chi(r_1) C_1 r_1^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi_1}{3}\right) + \widehat{W}_1(\eta), \tag{2.4}$$

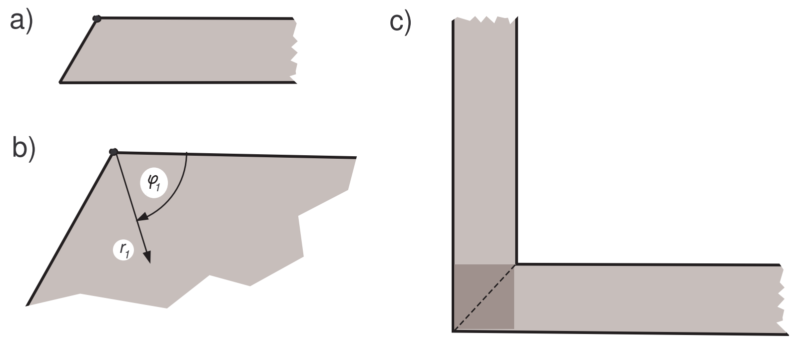

Рис. 6. Заостренная полуполоса (a), угол раствором $3\pi/4$ и полярные координаты (r_1, φ_1) (b). L–образная область и глубоко тонированный единичный квадрат в ней (c)

в котором C_1 — так называемый коэффициент интенсивности, $(r_j, \varphi_j) \in \mathbb{R}_+ \times (0, (2j+1)\pi/4)$ — система полярных координат с центром в точке $\mathcal{P}_j = (j, j)$ (рис. 6, a и b), $j = 0, 1$, $\widehat{W}_1 \in H^2(\Pi)$, $W_1(\mathcal{P}_0) = 0$ и $W_1(\mathcal{P}_1) = 0$, а $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ — эталонная срезающая функция,

$$\chi(r) = 1 \quad \text{при} \quad r < \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \chi(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > \frac{2}{3}. \tag{2.5}$$

Отметим, что около точки $\mathcal{P}_0$ функция W_1 ведет себя как $C_0 r_0^2 \sin(2\varphi) + O(r_0^4)$, т.е. оказывается гладкой. Первую собственную функцию нормируем в пространстве $L^2(\Pi)$

$$\|W_1; L^2(\Pi)\| = 1. \tag{2.6}$$

Её можно зафиксировать положительной в $\Pi \cup \gamma$ (теорема Крейна — Рутмана; см., например, [29, теорема 1.2.5]). В этом случае коэффициент C_1 положителен, так как за исключением отделённой в разложении (2.4) все гармонические функции в угле раствором $3\pi/4$ с условиями Дирихле и Неймана на его сторонах меняют знак (этот факт следует применять итерационно). Наконец, справедливо разложение на бесконечности

$$W_1(\eta) = K_1 e^{-\beta_1 \eta_1} \sin(\pi \eta_2) + \widetilde{W}_1(\xi), \tag{2.7}$$

в котором $\widetilde{W}_1(\xi) = O\big(e^{-\beta_2 \eta_1}\big)$ при $\eta_1 \to +\infty$ и

$$\beta_k = \sqrt{\pi^2 k^2 - \Lambda_1}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Коэффициент K_1 положителен, так как опять–таки среди членов $K_k e^{-\beta_k \eta_1} \sin(\pi k \eta_2)$ сходящегося при $\eta_1 > 1$ ряда Фурье для функции W_1 только отделённый в правой части соотношения (2.7) член имеет постоянный знак.

Ввиду важности результата о дискретном спектре смешанной краевой задачи в Π и для удобства читателя приведем простые и укороченные доказательства.

Лемма 2.1. *На интервале* $(0, \pi^2)$ *у задачи* (2.1)–(2.3)$_N$ *есть единственное собственное число* $\Lambda_1 \in (\pi^2/2, \pi^2)$.

Доказательство. Существование собственного числа в дискретном спектре установлено в публикациях [7], [8], [16] и др. Покажем, как можно установить его единственность и вывести простейшую оценку снизу. Посредством чётного продолжения через диагональ первого квадранта (штрих–пунктирная линия на рис. 6, c) сведем задачу (2.1)–(2.3)$_N$ к задаче Дирихле в L–образной области

$$\mathbf{L} = \bigcup_{j=1,2} \Big\{ \eta : \eta_j > 0, 0 < \eta_{3-j} < 1 \Big\},$$

которую разобьем на две ($j = 1, 2$) полуполосы $\varpi_j = \{\eta \in \mathbf{L} : \eta_j > 1\}$ с прямыми торцами и единичный квадрат $\blacksquare = (0, 1)^2$ (глубоко тонирован на рис. 6, c). В силу условия Дирихле на границе $\partial\mathbf{L}$ одномерное неравенство Фридрихса на отрезке $(0, 1)$ показывает, что

$$\|\nabla_\eta W; L^2(\varpi_j)\|^2 \geqslant \pi^2 \|W; L^2(\varpi_j)\|^2 \quad \forall W \in H^1_0(\mathbf{L}). \tag{2.9}$$

Первые два собственных числа оператора Лапласа в квадрате $\blacksquare$ с условиями Дирихле на двух смежных сторонах и Неймана на двух других равны $\frac{\pi^2}{2}$ и $\frac{5\pi^2}{2}$. Первое — простое с положительной собственной функцией $\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta_2\right)$, удовлетворяющей однородному условию Неймана на диагонали квадрата, т.е. условию $(2.3)_N$ на γ, а второе — двукратное. Таким образом, выполнены соотношения

$$\|\nabla_\eta W; L^2(\blacksquare)\|^2 \geqslant \frac{\pi^2}{2} \|W; L^2(\blacksquare)\|^2 \quad \forall \quad W \in H^1_0(\mathbf{L}) \tag{2.10}$$

$$\|\nabla_\eta W; L^2(\blacksquare)\|^2 \geqslant \frac{5\pi^2}{2} \|W; L^2(\blacksquare)\|^2 \quad \textit{при всех} \quad W \in H^1_0(\mathbf{L}), \tag{2.11}$$

$$\textit{подчиненных ограничению} \quad \int\limits_{\mathbf{Q}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta_1\right) W(\eta)d\eta = 0.$$

В итоге нужные факты обеспечены минимальным и максиминимальным принципами (см. [30, теоремы 10.2.1 и 10.2.2] и соответственно неравенствами (2.9), (2.10) и неравенствами (2.9), (2.11)). Лемма доказана. □

Замечание 2.1. *Аналогичные результаты известны и для заостренных полос*

$$\Pi^\alpha = \{\eta : \eta_2 \in (0, 1), \eta_1 > \eta_2 \operatorname{ctg} \alpha\}, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})\}$$

(см. публикации [8], [9] и др.), однако кратность дискретного спектра неограниченно возрастет при $\alpha \to +0$. В статье [9], где сделано это наблюдение, содержится изъян: построенное асимптотическое приближение к собственным функциям не попадает в область определения самосопряжённого оператора задачи из-за сингулярности $O\big(r^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}}\big)$ в точке $(\operatorname{ctg}\alpha, 1)$. Способы устранения этой неувязки указаны в публикации [31].

2.2. Существенный спектр задачи в четверти слоя. Растяжение всех трёх координат

$$x \quad \mapsto \quad \xi = \varepsilon^{-1}\big(y_1 + 1, y_2 + 1, z\big) \tag{2.12}$$

относительно точки $P^{--} \in \mathbb{R}^3$ и формальный переход к $\varepsilon = 0$ превращает тонкую область (1.23) в множество (1.20), на котором рассмотрим смешанную краевую спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi V(\xi) &= MV(\xi), \quad \xi \in \Xi, \\ V(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Theta := \Theta^1 \cup \Theta^2, \\ \partial_{\nu(\xi)} V(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Upsilon := \Upsilon^0 \cup \Upsilon^1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь $\Theta^j = \{\xi \in \partial\Xi : \xi_3 = j\}$, $j = 0, 1$, — квадранты, т.е. основания бесконечного многогранника (1.20), а

$$\Upsilon^k = \{\xi \in \partial\Xi : \xi_k > (-1)^k \xi_3, \xi_3 \in (0, 1)\}, \qquad k = 1, 2,$$

— его боковые грани. В силу определения (1.23) тонкого конечного многогранника Ω^ε аналогичные (2.12) растяжения координат относительно других точек из списка (1.24) и повороты декартовой системы дают ту же четверть слоя (1.20).

Вариационной постановке задачи (2.13)

$$\big(\nabla_\xi V, \nabla_\xi \Psi\big)_\Xi = M\big(V, \Psi\big)_\Xi \quad \forall \Psi \in H^1_0(\Xi; \Upsilon) \tag{2.14}$$

ставится [30, гл. 10, §1] в соответствие самосопряжённый положительно определённый неограниченный оператор B в гильбертовом пространстве $\mathcal{L} = L^2(\Xi)$. Ближайшая цель — убедиться в том, что существенный спектр оператора имеет вид

$$\wp_e = [M_\dagger, +\infty) = [\Lambda_1, +\infty), \tag{2.15}$$

где $\Lambda_1 \in (\pi^2/2, \pi^2)$ — собственное число задачи (2.1)–(2.3) (см. лемму 2.1). В значительной степени повторим рассуждения из публикаций [10], [12].

Начнём с проверки включения $[\Lambda_1, +\infty) \subset \wp_e$, для чего определим сингулярную последовательность Вейля для оператора B в точке $M \geqslant M_\dagger$ следующим образом:

$$\mathcal{Z}_k(\xi) = \|X_k Z_M; \mathcal{L}\|^{-1} X_k(\xi_1) Z_M(\xi), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

где

$$Z_M(\xi) = e^{i\xi_1\sqrt{M-M_\dagger}} W_1(\xi_2, \xi_3), \quad i = \sqrt{-1},$$
$$X_k(\xi_1) = \chi(\xi_1 - 2^{k+1} + 1)\big(1 - \chi(\xi_1 - 2^k)\big).$$

При этом χ — срезающая функция (2.5). Таким образом, носитель функции (2.16) расположен на множестве Ξ_k^1, где

$$\Xi_k^j = \Big\{\xi \in \overline{\Xi} : \xi_1 \in \Big[2^k + \frac{j}{3}, 2^{k+1} - \frac{j}{3}\Big]\Big\}, \quad j = 1, 2.$$

В результате справедлива формула $\operatorname{supp} \mathcal{Z}_k \cap \operatorname{supp} \mathcal{Z}_j = \varnothing$ при $k \neq j$, а вместе с ней и первые два свойства сингулярной последовательности Вейля

1° $\|\mathcal{Z}_k; \mathcal{L}\| = 1$,

2° $\mathcal{Z}_k \to 0$ слабо в $\mathcal{L}$

становятся понятными. Поскольку $X_k = 1$ на Ξ_k^2, в силу равенства (2.6) имеем

$$\|X_k Z_M; \mathcal{L}\|^2 \geqslant \int\limits_{2^k+\frac{2}{3}}^{2^{k+1}-\frac{2}{3}} \int\limits_{\Pi} \big|W_1(\xi_2, \xi_3)\big|^2 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_1 = 2^{k+1} - 2^k - \frac{4}{3}.$$

Кроме того, $(\Delta_\xi + M)Z_M = 0$, а значит, функция $(\Delta_\xi + M)\mathcal{Z}_k$ обращается в нуль на множестве Ξ_k^2 и

$$\|(B - M)(X_k Z_M); \mathcal{L}\|^2 \leqslant \int\limits_{\Xi_k^1 \setminus \Xi_k^2} \big|\big[\Delta_\xi, X_k\big] Z_M\big|^2 d\xi \leqslant 2c_{\chi M}.$$

Итак, стало очевидным и третье свойство

3° $\|B\mathcal{Z}_k - M\mathcal{Z}_k; \mathcal{L}\| \to 0$.

В итоге $M \in \wp_e$ и $[\Lambda_1, +\infty) \subset \wp_e$ по критерию Вейля (ср. [30, теорема 9.1.2]).

Пусть теперь $M \in (0, M_\dagger)$. Далее будет установлена однозначная разрешимость задачи

$$\big(\nabla_\xi V, \nabla_\xi \Psi\big)_\Xi - M\big(V, \Psi\big)_\Xi + t\big(V, \Psi\big)_{\Xi(R)} = f(\Psi), \quad \Psi \in H_0^1(\Xi; \Upsilon), \tag{2.17}$$

в которой $f \in \big(H_0^1(\Xi; \Upsilon)\big)^*$ — линейный непрерывный функционал на пространстве $H_0^1(\Xi; \Upsilon)$, а число $t > 0$ и ограниченное множество $\Xi(R) \subset \Xi$ будут зафиксированы надлежащим образом. Тот факт, что отображение

$$H_0^1(\Xi; \Upsilon) \ni V \quad \mapsto \quad \mathcal{B}_t(R)V = f \in \big(H_0^1(\Xi; \Upsilon)\big)^*$$

оказалось изоморфизмом, влечёт за собой фредгольмово свойство оператора $\mathcal{B}_0$ исходной задачи (2.14), так как разность $\mathcal{B}_t(R) - \mathcal{B}_0$ — компактный оператор ввиду компактности вложения $H^1(\Xi) \subset L^2(\Xi(R))$, а именно

$$(\mathcal{B}_t(R)V - \mathcal{B}_0 V, \Psi)_\Xi = t(V, \Psi)_{\Xi(R)}.$$

Начнём с проверки простых и в целом известных фактов (см. [10], [32] и др.).

Предложение 2.1. *Пусть $T > 1$ и Λ_1^T — первое собственное число смешанной краевой задачи на трапеции $\Pi^T = \{\eta : \eta_1 \in (\eta_2, T), \eta_2 \in (0,1)\}$*

$$\begin{aligned} &-\Delta_\eta W^T(\eta) = \Lambda^T W^T(\eta) \quad \text{при} \quad \eta \in \Pi^T, \\ &W^T(\eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta_2 < \eta_1 < T, \quad \eta_2 = 0 \quad \text{или} \quad \eta_2 = 1, \\ &\partial_{\nu(\eta)} W^T(\eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta \in \partial\Pi^T, \quad \eta_2 \in (0,1). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Функция $(1, +\infty) \ni T \mapsto \Lambda_1^T$ гладкая и строго монотонно возрастающая. Для неё верна оценка

$$\left|\Lambda_1^T - \Lambda_1 + \beta_1 K_1^2 e^{-2\beta_1 T}\right| \leqslant C e^{-\beta_2 T}, \tag{2.19}$$

причём числа K_1 и β_k взяты из формул (2.7) и (2.8).

Доказательство. Самый простой способ проверить свойства собственного числа Λ_1^T как функции параметра T — построение асимптотик. При этом достаточна реализация формальной процедуры — обоснование полученных представлений проводится по стандартным схемам, неоднократно публиковавшимся (см. [22, гл. 5, §6 и гл. 9], [32] и др.). Подчеркнём, что сжатием координат «длинная» область Π^T превращается в «тонкую», а для таких тел, даже упругих, опубликованная литература необозрима (см., например, заведомо неполные списки в монографиях [22], [25], [33]–[36]) и даёт ответы на почти все осмысленные вопросы.

Асимптотику собственных пар задачи (2.18) ищем в виде

$$\Lambda_1^T = \Lambda_1 + e^{-2\beta_1 T}\Lambda' + \ldots, \tag{2.20}$$

$$W_1^T(\xi) = W_1(\xi) + K_1 e^{-2\beta_1 T} e^{\beta_1 \eta_1} \sin(\pi\eta_2) + e^{-2\beta_1 T} W'(\xi) + \ldots, \tag{2.21}$$

где многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа, а пара $\{\Lambda'; W'\}$ подлежит определению. Согласно разложению (2.7) сумма первых двух членов в правой части анзаца (2.21) оставляют в краевом условии на отрезке $\gamma^T = \{\eta : \eta_1 = T, \eta_2 \in 0,1)\}$ невязку $O\big(e^{-\beta_2 T}\big)$. Для пары $\{\Lambda'; W'\}$ получаем уравнение

$$-\Delta_\eta W'(\eta) - \Lambda_1 W'(\eta) = \Lambda' W_1(\eta), \quad \eta \in \Pi,$$

с краевыми условиями Дирихле (2.2) на боковых сторонах и найденному согласно уже упомянутому разложению (2.7) условием Неймана на торце

$$\partial_{\nu(\eta)} W'(\eta) = -K_1 \partial_{\nu(\eta)} \left(e^{\beta_1 \eta_2} \sin(\pi\eta_2)\right), \quad \eta \in \gamma.$$

Поскольку Λ_1 — простое собственное число, имеется одно условие разрешимости полученной задачи в классе исчезающих на бесконечности функций (см., например, [28, гл. 2 и 5]), которое при учёте нормировки (2.6) выполняем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \Lambda' \|W'; L^2(\Pi)\|^2 = -\int\limits_{\Pi} W_1(\eta) \left(\Delta_\eta + \Lambda_1\right) W'(\eta) d\eta \\ &= K_1 \int\limits_{\gamma} W_1(\eta) \partial_{\nu(\eta)} \left(e^{\beta_1 \eta_1} \sin(\pi\eta_2)\right) ds_\eta \\ &= -K_1 \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{\gamma^t} \left(W_1(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(e^{\beta_1 \eta_1} \sin(\pi\eta_2)\right) - e^{\beta_1 \eta_1} \sin(\pi\eta_2) \frac{\partial W_1}{\partial \eta_1}(\eta)\right) d\eta_2 \\ &= -K_1^2 2\beta_1 \int\limits_0^1 \left(\sin(\pi\eta_2)\right)^2 d\eta_2 = -\beta_1 K_1^2. \end{aligned}$$

Поправочный член в представлении (2.20) вычислен.

Для проверки свойства монотонности возьмём малый параметр $h > 0$ и сравним собственные числа Λ_1^{T-h} и Λ_1^T для трапеций $\Pi^{T-h} \subset \Pi^T$. Опять примем простейшие асимптотические анзацы

$$\Lambda_1^{T-h} = \Lambda_1^T + h\Lambda_\bullet^T + \dots,$$
$$W_1^{T-h}(\eta) = W_1^T(\eta) + hW_\bullet^T(\eta) + \dots.$$

При учёте формулы Тейлора

$$\frac{\partial W_1^T}{\partial \eta_1}(\eta_1 - h, \eta_2) = \frac{\partial W_1^T}{\partial \eta_1}(\eta_1, \eta_2) - h\frac{\partial^2 W_1^T}{\partial \eta_1^2}(\eta_1, \eta_2) + \dots$$

обнаруживаем, что поправочные члены в анзацах находятся из уравнения

$$-\Delta_\eta W_\bullet^T(\eta) - \Lambda_1^T W_\bullet^T(\eta) = \Lambda_\bullet^T W_1^T(\eta) \quad \text{в} \quad \Pi^T,$$

с однородными условиями Дирихле на основаниях σ_0^T и σ_1^T трапеции Π^T и следующими условиями Неймана на боковых сторонах:

$$\frac{\partial W_\bullet^T}{\partial \nu(\eta)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \quad \frac{\partial W_\bullet^T}{\partial \eta_1}(T, \eta_2) = \frac{\partial^2 W_1^T}{\partial \eta_1^2}(T, \eta_2) \quad \text{при} \quad \eta_2 \in (0, 1).$$

Соблюдая одно (Λ_1^T — простое собственное число) условие разрешимости сформированной задачи, находим, что

$$\begin{aligned}\Lambda_\bullet^T \|W_1^T; L^2(\Pi^T)\|^2 &= -\int_0^1 W_1^T(T, \eta_2)\frac{\partial^2 W_1^T}{\partial \eta_1^2}(T, \eta_2)d\eta_2 \\ &= \int_0^1 W_1^T(T, \eta_2)\Big(\frac{\partial^2 W_1^T}{\partial \eta_2^2}(T, \eta_2) + \Lambda_1^T W_1^T(T, \eta_2)\Big)d\eta_2 \\ &= \int_0^1 \Big(\Lambda_1^T\big|W_1^T(T, \eta_2)\big|^2 - \Big|\frac{\partial W_1^T}{\partial \eta_2}(T, \eta_2)\Big|^2\Big)d\eta_2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Функция W_1^T по крайней мере дважды непрерывно дифференцируема в угловых точках — концах отрезка γ^T. Таким образом, при помощи неравенства Фридрихса выводим из формулы (2.22) оценку

$$\Lambda_\bullet^T \leqslant \big(\Lambda_1^T - \pi^2\big)\|W_1^T; L^2(\Pi^T)\|^{-2}\|W_1^T; L^2(\gamma^T)\|^2,$$

причём обе нормы положительной в $\Pi^T \cup \gamma \cup \gamma^T$ функции W_1^T не обращаются в нуль. Итак, производная функции $T \mapsto \Lambda_1^T$ в какой–либо точке $T > 1$ строго положительна при условии $\Lambda_1^T < \pi^2$. Неравенство $\Lambda_1^T \geqslant \pi^2$ невозможно при всех $T > 1$, так как в силу формулы (2.19) при больших T нужное условие выполнено.

Отметим, что «почти тождественная» замена координат

$$\eta \mapsto (\eta_1\chi(\eta_1 - 1) + (\eta_1 - h)(1 - \chi(\eta_1 - 1)), \eta_2)$$

переводит трапецию Π^T в трапецию Π^{T-h}, т.е. сдвиг границы — регулярное возмущение задачи и обоснование асимптотики в этом случае совершенно тривиально (ср. монографию [37, гл. 7, §6]). Проверка предложения закончена.

Вернёмся к рассмотрению задачи (2.17) при $M < M_\dagger$. Разобьем область Ξ на три множества

$$\begin{aligned} &\Xi(R) = \{\xi \in \Xi : \xi_1 + 1 < R, \xi_2 < R\}, \\ &\Xi^+(R) = \{\xi \in \Xi : \xi_1 + 1 > R, \xi_2 < \xi_1 + 1\}, \\ &\Xi^-(R) = \{\xi \in \Xi : \xi_2 > R, \xi_2 > \xi_1 + 1\}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

а размер $R > 1$ выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\Lambda_1^T > \frac{1}{2}\big(M_\dagger + M\big) > M \quad \textit{при} \quad T > R, \tag{2.24}$$

в котором Λ_1^T — первое собственное число задачи (2.18). Предложение 2.1 показывает, что требование (2.24) можно соблюсти при любом $M \in \big(0, M_\dagger\big)$.

Благодаря условиям Дирихле на основаниях бесконечной усечённой пирамиды $\Xi^+(R)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \|\nabla_\xi V; L^2(\Xi^+(R))\|^2 &\geqslant \int\limits_{R-1}^{+\infty} \int\limits_{\Pi^{\xi_1+1}} |\nabla_\eta V(\xi_1, \eta)|^2 d\eta d\xi_1 \\ &\geqslant \int\limits_{R-1}^{+\infty} \Lambda_1^{\xi_1+1} \int\limits_{\Pi^{\xi_1+1}} |V(\xi_1, \eta)|^2 d\eta d\xi_1 \geqslant \frac{M + M_\dagger}{2} \|V; L^2(\Xi^+(R))\|^2. \end{aligned}$$

Точно такое же неравенство выполнено и на множестве $\Xi^-(R)$, конгруэнтном множеству $\Xi^+(R)$. Следовательно, для симметричной билинейной формы $b(V, \Psi; \Xi)$ из левой части интегрального тождества (2.17), суженной на подобласти (2.23), верны формулы

$$\begin{aligned} b(V, V; \Xi^\pm(R)) &= \|\nabla_\xi V; L^2(\Xi^\pm(R))\|^2 - M\|V; L^2(\Xi^\pm(R))\|^2 \\ &\geqslant \delta\|\nabla_\xi V; L^2(\Xi^\pm(R))\|^2 + \frac{1}{2}\left((M_\dagger - M) - \delta(M_\dagger + M)\right)\|V; L^2(\Xi^\pm(R))\|^2, \\ b(V, V; \Xi(R)) &= \|\nabla_\xi V; L^2(\Xi^\pm(R))\|^2 + (t - M)\|V; L^2(\Xi(R))\|^2. \end{aligned}$$

Зафиксировав числа $t > M$ и $\delta \in \big(0, (M_\dagger + M)^{-1}(M_\dagger - M)\big)$, обнаруживаем, что форма $b(V, \Psi; \Xi)$ положительно определена на пространстве $H_0^1(\Xi; \Upsilon)$, т.е. по тереме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве задача (2.17) однозначно разрешима. $\square$

Итак, доказана

Теорема 2.1. *Существенным спектром задачи (2.13) в области (1.20) с условиями Дирихле на основаниях $\Upsilon^\pm$ служит луч (2.15), точка отсечки $M_\dagger$ которого — собственное число Λ_1 из дискретного спектра задачи (2.1)–(2.3) в заостренной полосе (1.14).*

2.3. Дискретный спектр задачи в четверти слоя. Приём из этого раздела несколько отличается от приёмов, использованных в работах [11] и [12] для проверки непустоты дискретного спектра в слоевидных областях схожих форм.

Согласно минимальному принципу [30, теорема 10.2.1] нижняя грань $\underline{\wp}$ всего спектра $\wp$ задачи (2.14) (или (2.13) в дифференциальной форме) удовлетворяет соотношению

$$\underline{\wp} = \min_{\Psi \in H_0^1(\Xi;\Upsilon)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla_\xi \Psi; L^2(\Xi)\|^2}{\|\Psi; L^2(\Xi)\|^2}.$$

Таким образом, для проверки непустоты дискретного спектра $\wp_d$ достаточно найти пробную функцию $\Psi \in H_0^1(\Xi; \Upsilon)$, для которой выполнено неравенство

$$\|\nabla_\xi \Psi; L^2(\Xi)\|^2 - M_\dagger\|\Psi; L^2(\Xi)\|^2 < 0. \tag{2.25}$$

При этом оказывается, что $\underline{\wp}$ — первое собственное число в дискретном спектре $\wp_d$.

Положим

$$\Psi_\delta(\xi) = \begin{cases} W_1(\xi_2, \xi_3) & \text{при} \quad \xi_1 \leqslant 0, \\ W_1(\xi_2, \xi_3) e^{-\delta \xi_1} & \text{при} \quad \xi_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Понятно, что $\Psi_\delta \in H^1_0(\Xi; \Upsilon)$ при $\delta > 0$. В силу нормировки (2.6) имеем

$$\|\Psi_\delta; L^2(\Xi)\|^2 = \|W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 + \int\limits_0^\infty e^{-2\delta\xi_1} d\xi_1 \int\limits_\Pi |W_1(\xi_2, \xi_3)|^2 d\xi_2 d\xi_3 = \|W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 + \frac{1}{2\delta}. \quad (2.26)$$

Здесь $\mathbb{T} = \{\xi : \xi_1 \in (-\xi_3, 0), \xi_2 > \xi_3, \xi_3 \in (0,1)\}$ — усеченная призма с треугольным сечением. Считая параметр δ малым, аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} \|\nabla_\xi \Psi_\delta; L^2(\Xi)\|^2 &= \|\nabla_\xi W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 + \int\limits_0^\infty e^{-2\delta\xi_1} d\xi_1 \int\limits_\Pi \left|\nabla_\eta W_1(\eta)\right|^2 d\eta + O(\delta) \\ &= \|\nabla_\xi W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 + \frac{1}{2\delta}\Lambda_\dagger + O(\delta). \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} &\|\nabla_\xi W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 - \Lambda_1 \|W_1; L^2(\mathbb{T})\|^2 \\ &= \mathbf{J} := -\int\limits_{\mathbb{P}} W_1(\xi_2, \xi_3)\big(\Delta_\xi + \Lambda_1\big) W_1(\xi_2, \xi_3) d\xi + \int\limits_{\Theta^2} W_1(\xi_2, \xi_3) \partial_{\nu(\xi)} W_1(\xi_2, \xi_3) ds_\xi. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части аннулируется в силу уравнения (2.1) для пары $\{\Lambda_1; W_1\}$. Второй интеграл равен

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathbb{P}} W_1\Big(\eta_1, \frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\Big) \frac{\partial W_1}{\partial \eta_2}\Big(\eta_1, \frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\Big) d\eta, \quad (2.27)$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ — система декартовых координат в плоскости грани Υ^2, причём $\eta_1 = \xi_2$ и $\eta_2 = 2^{-\frac{1}{2}}(\xi_3 - \xi_1)$, а $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}_+ \times \big(0, \sqrt{2}\big)$ — заостренная полуполоса с вершинами $\eta = (0,0)$ и $\eta = \big(1, \sqrt{2}\big)$. Отрезок, соединяющий эти точки, обозначим $\mathbb{I}$ и при помощи формулы интегрирования по частям получим, что

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{I}} \left| W_1\Big(\eta_1, \frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\Big)\right|^2 ds < 0. \quad (2.28)$$

Строгое неравенство выполнено потому, что первая собственная функция W_1 задачи (2.1)–(2.3) положительна на торце полуполосы (1.14) — в любом случае она не может обратиться в нуль всюду на торце в силу теоремы о единственности продолжения (см., например, книгу [38]).

Собирая формулы (2.26)–(2.28), видим, что левая часть неравенства (2.25) не превосходит суммы $\mathbf{J} + C\delta$ и потому действительно становится отрицательной при достаточно малом $\delta > 0$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.2. *В дискретном спектре задачи* (2.13) *(или* (2.14) *в вариационной форме) имеется по крайней мере одно собственное число.*

2.4. Экспоненциальное затухание собственной функции. Пусть M_1 — первое (наименьшее) собственное число задачи (2.13), предоставленное теоремой 2.2. Соответствующую собственную функцию $V_1 \in H^1_0(\Xi;\Upsilon)$ нормируем в $L^2(\Xi)$ и зафиксируем положительной в $\Xi \cup \Theta$. В интегральное тождество (2.14) подставим пробную функцию $\Psi^\kappa_T = \mathcal{R}^\kappa_T \mathcal{V}^\kappa_T$, где $\mathcal{V}^\kappa_T = \mathcal{R}^\kappa_T V_1$. Непрерывный кусочно–гладкий весовой множитель имеет вид

$$\mathcal{R}^\kappa_T(\xi) = \begin{cases} e^\kappa & \text{при} \quad \rho \leqslant 1, \\ e^{\kappa\rho} & \text{при} \quad \rho \in (1,T), \\ e^{\kappa T} & \text{при} \quad \rho \geqslant T, \end{cases} \tag{2.29}$$

причём $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, а κ и R — положительные параметры, которые далее выберем малым и большим соответственно. Подчеркнём, что функции $\mathcal{V}^\kappa_T$ и Ψ^κ_T принадлежат пространству $H^1_0(\Xi;\Theta)$, так как весовой множитель (2.29) постоянен при больших радиусах ρ. В результате простых преобразований (несколько раз коммутируем оператор–градиент ∇_ξ с функцией $\mathcal{R}^\kappa_T$) получим равенство

$$\|\nabla_\xi \mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2 - \|\mathcal{V}^\kappa_T(\mathcal{R}^\kappa_T)^{-1}\nabla_\xi \mathcal{R}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2 = M_1\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2. \tag{2.30}$$

Заметим, что

$$\nabla_\xi \mathcal{R}^\kappa_T(\xi) = 0 \quad \textit{при} \quad \rho \notin (1,T), \qquad \mathcal{R}^\kappa_T(\xi)^{-1}|\nabla_\xi \mathcal{R}^\kappa_T(\xi)| \leqslant \kappa \quad \textit{при} \quad \rho \in (1,T). \tag{2.31}$$

Разобьём множество Ξ на четыре части: множество $\Xi(R)$ из формулы (2.23), а также множества

$$\Sigma^1_R = \Big\{\xi \in \Xi : \xi_2 < R, \xi_1 > R - \frac{1}{2}\Big\}, \qquad \Sigma^2_R = \Big\{\xi \in \Xi : \xi_1 < R - \frac{1}{2}, \xi_2 > R\Big\}$$

и $K_R = \Xi \setminus \big(\Xi(R) \cup \Sigma^1_R \cup \Sigma^1_R\big)$. Вспомнив предложение 2.1, выберем размер $R > 1$ так, чтобы выполнялось соотношение $\Lambda^R_1 > \frac{1}{2}(M_1 + \Lambda_1)$. Тогда на подобластях Σ^1_R и Σ^2_R, конгруэнтных множеству $(R,+\infty) \times \Pi^R \ni (\tau,\eta)$, выполняются оценки

$$\frac{1}{2}(M_1 + \Lambda_1)\|\mathcal{V}^\kappa_T : L^2(\Sigma^j_R)\|^2 \leqslant \Lambda^R_1 \|\mathcal{V}^\kappa_T : L^2(\Sigma^j_R)\|^2 \leqslant \|\nabla_\xi \mathcal{V}^\kappa_T : L^2(\Sigma^j_R)\|^2, \tag{2.32}$$

полученные интегрированием по τ неравенства Фридрихса на трапеции Π^R. Одномерное неравенство Фридрихса на отрезке $(0,1) \ni \xi_3$ после дополнительного интегрирования приводит к соотношению

$$\pi^2\|\mathcal{V}^\kappa_T : L^2(K_R)\|^2 \leqslant \|\nabla_\xi \mathcal{V}^\kappa_T : L^2(K_R)\|^2. \tag{2.33}$$

Теперь при помощи соотношений (2.31)–(2.33) преобразуем равенство (2.30) в оценку

$$\begin{aligned} M_1 e^{R\sqrt{2}\kappa} \geqslant & M_1\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi(R))\|^2 \geqslant \delta\|\nabla_\xi \mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2 \\ & + ((1-\delta)\pi^2 - M_1 - \kappa)\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(K_R)\|^2 \\ & + \sum_{j=1,2}\Big(\frac{1}{2}(M_1 + \Lambda_1) - M_1 - \kappa\Big)\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Sigma^j_R)\|^2. \end{aligned}$$

Взяв $\delta > 0$ и $\kappa > 0$ достаточно малыми, обнаруживаем, что множители при нормах $\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(K_R)\|$ и $\|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Sigma^j_R)\|$ положительны, а значит, выполнена равномерная оценка

$$\|\nabla_\xi \mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2 + \|\mathcal{V}^\kappa_T; L^2(\Xi)\|^2 \leqslant \mathcal{M}. \tag{2.34}$$

Поскольку весовой множитель (2.29) монотонно возрастает при увеличении параметра T, переход в неравенстве (2.34) к пределу при $T \to +\infty$ обеспечивает следующее утверждение, подтверждающее упоминавшееся свойство затухания на бесконечности собственной функции V_1.

Теорема 2.3. *Для найденной первой собственной функции $V_1 \in H^1_0(\Xi;\Upsilon)$ задачи (2.13) верна весовая оценка*

$$\|e^{\kappa\rho}\nabla_\xi V_1; L^2(\Xi)\|^2 + \|e^{\kappa\rho}V_1; L^2(\Xi)\|^2 \leqslant \mathcal{K}, \tag{2.35}$$

где κ и $\mathcal{K}$ — некоторые положительные числа и $\rho = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.

2.5. Замечания о пороговых резонансах. Плоская задача (2.1)–(2.3) уже давно была исследована в объёме, достаточном для целей асимптотического анализа в данной работе. В то же время для пространственной задачи (2.13) целый ряд важных вопросов все же остался без ответов, например, кратность дискретного спектра и возникновение пороговых резонансов.

В плоской области (1.14) пороговый резонанс (см. статьи [39], [40] и др.) обусловлен появлением у задачи с пороговым спектральным параметром $\Lambda = \pi^2$ нетривиального ограниченного решения, захваченной (исчезающей на бесконечности) или почти стоячей (стабилизирующейся на бесконечности) волны. Установить отсутствие таких решений в задаче (2.1)–(2.3) нетрудно: в случае условия Дирихле на торце годится метод [26], а в случае условий Неймана нужно применить неравенство (2.11), означающее, что второе собственное число задачи в треугольнике $\{\eta \in \Pi : \eta_1 < 1\}$ строго больше точки отсечки π^2, а также достаточное условие [41], [42] или первый из двух критериев [32] отсутствия порогового резонанса.

В пространственной задаче (2.13) на слоевидных областях (1.20)—(1.22) само понятие порогового резонанса нуждается в уточнении, так как асимптотика её решения на бесконечности при $M = \Lambda_1$ неизвестна (теорема 2.3 относится только к случаю $M < \Lambda_1$). Впрочем, в этой задаче на области (1.21) допустимо продолжение по четности на множество $\mathbb{R}\times\Pi$ с последующим применением преобразования Фурье по переменной ξ_1, а нужное ограниченное решение имеет вид $\xi \mapsto W_1(\xi_2,\xi_3)$. Кстати, именно ввиду указанного порогового резонанса в области $\Xi_\sqcup$, заданной формулой (1.21), далее предельная задача (4.1) на отрезке $(-1,1) \ni y_1$ приобретает краевое условие Неймана. Влияние пороговых резонансов на постановку краевых условий в предельных задачах также обсуждается в п. 3 §5.

Очередное утверждение о разрешимости уравнения Гельмгольца в скошенной полуполосе (1.14)

$$-\Delta_\eta w(\eta) - \pi^2 w(\eta) = F(\eta), \quad \eta \in \Pi, \tag{2.36}$$

с краевыми условиями (2.2) и (2.3) получается конкретизацией общих результатов из книги [28, гл. 5] и статьи [40], однако для удобства читателя воспроизведем краткое его доказательство. С этой целью определим экспоненциальное весовое пространство Соболева $\mathcal{W}^1_\beta(\Pi)$ (пространство Кондратьева; см. первоисточник [43] и, например, книги [28], [44]) как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\overline{\Pi})$ по норме

$$\big\|w; \mathcal{W}^1_\beta(\Pi)\big\| = \big\|e^{\beta\eta_1}w; H^1(\Pi)\big\|, \tag{2.37}$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ — весовой индекс. Пространство $\mathcal{W}^1_\beta(\Pi)$ состоит из тех функций $w \in H^1_{loc}(\overline{\Pi})$, для которых конечна норма (2.37), и в случае $\beta = 0$ совпадает с $H^1(\Pi)$, но при $\beta > 0$ функции из $\mathcal{W}^1_\beta(\Pi)$ исчезают на бесконечности, а при $\beta < 0$ им разрешен некоторый рост, причём скоростью затухания/роста управляет именно весовой индекс. Через $\mathcal{W}^{1,0}_\beta(\Pi)$ обозначим подпространство функций, подчинённых условиям Дирихле из списка (2.2), (2.3).

Под обобщённым решением задачи (2.36), (2.2), (2.3) в весовых классах, как обычно, понимаем функцию $w \in \mathcal{W}^{1,0}_\beta(\Pi)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\nabla_\eta w, \nabla_\eta \psi)_\Pi - \pi^2 (w,\psi)_\Pi = f(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi), \tag{2.38}$$

где $f \in \big(\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)\big)^*$ — линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)$, например,

$$f(\psi) = (F, \psi)_\Pi \quad \textit{при} \quad e^{\beta\eta_1} F \in L^2(\Pi).$$

Задаче (2.38) отвечает непрерывное отображение

$$\mathcal{W}^{1,0}_{\beta}(\Pi) \ni w \quad \mapsto \quad \mathcal{A}_\beta w := f \in \big(\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)\big)^*.$$

Предложение 2.2. 1) *Операторы $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{A}_{-\beta}$ взаимно сопряжённые. Они оказываются фредгольмовыми в случае $\beta \in \big(0, \pi\sqrt{3}\big)$, но теряют это свойство при $\beta = 0$ и $\beta = \pi\sqrt{3}$.*

2) *Если $\beta \in \big(0, \pi\sqrt{3}\big)$ и $f \in \big(\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)\big)^* \subset \big(\mathcal{W}^{1,0}_{\beta}(\Pi)\big)^*$, то у задачи (2.38), в которой произведена замена $\beta \mapsto -\beta$, есть единственное (ограниченное) решение $w \in \mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)$, представимое в виде*

$$w(\eta) = (1 - \chi(\eta_1 - 1))a \sin(\pi\eta_2) + \widetilde{w}(\eta), \tag{2.39}$$

где $\widetilde{w} \in \mathcal{W}^{1,0}_{\beta}(\Pi)$, $a \in \mathbb{R}$, χ — срезка (2.5), и верна оценка

$$\big(\big\|\widetilde{w}; \mathcal{W}^{1,0}_{\beta}(\Pi)\big\|^2 + |a|^2\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_\beta \big\|f; (\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi))^*\big\|, \tag{2.40}$$

причём множитель c_β не зависит от функционала f, но неограниченно возрастает при $\beta \to +0$ или $\beta \to \pi\sqrt{3} - 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что решениями задачи Дирихле для однородного ($F = 0$) уравнения (2.36) в цельной полосе $\mathbb{R} \times (0, 1)$ служат функции

$$\eta_1 \sin(\pi\eta_2) \quad \textit{и} \quad e^{\pm\eta_1\pi\sqrt{k^2-1}} \sin(\pi k\eta_2), \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.41}$$

Итак, первое утверждение — следствие классической теоремы Кондратьева [43] (простое изложение теории представлено во вводной главе 2 монографии [28]), причём ограничение на величину β помещает весовые индексы $\pm\beta$ между «запретными» индексами 0 и $\pm\pi\sqrt{3}$, взятыми из последней формулы (2.41) при $k = 1, 2$.

Отсутствие порогового резонанса в задаче (1.1)–(1.3) означает, в частности, что оператор $\mathcal{A}_\beta$ при $\beta > 0$ — мономорфизм. Следовательно, в случае $\beta \in \big(0, \pi\sqrt{3}\big)$ оператор $\mathcal{A}_{-\beta}$ — эпиморфизм. Теорема 4.3.3 [28] о приращении индекса в переложении для цилиндрических областей показывают, что $\operatorname{Ind} \mathcal{A}_\beta - \operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta} = -2$, где два — количество решений в списке (2.41) с полиномиальным ростом на бесконечности. Поскольку

$$\operatorname{Ind} \mathcal{A} = \dim\ker \mathcal{A} - \dim\operatorname{coker} \mathcal{A} \quad \textit{и} \quad \dim\ker \mathcal{A}_\beta = 0, \quad \dim\operatorname{coker} \mathcal{A}_{-\beta} = 0,$$

обнаруживаем, что $\operatorname{Ind} \mathcal{A}_{-\beta} = -1$, а значит, сужение оператора $\mathcal{A}_{-\beta}$ на подпространство $\mathcal{W}^{1,0}_{\beta\oplus}(\Pi)$ функций из $\mathcal{W}^{1,0}_{-\beta}(\Pi)$, допускающих представление (2.39), которое снабдим нормой из левой части (2.40), приобретает нулевой индекс и становится изоморфизмом ввиду отсутствия захваченных волн на пороговой частоте. Таким образом, проверено и второе утверждение, т.е. предложение доказано полностью. Отметим, что введённое подпространство называется весовым классом с отделённой асимптотикой. □

Замечание 2.2. *При проверке предложения 2.2 было установлено равенство*

$$\dim\ker \mathcal{A}_{-\beta} = 1.$$

Нетрудно усмотреть, что при $K = N, D$ подпространство $\ker \mathcal{A}_{-\beta}$ натянуто на решение $\mathbf{W}_K$ однородной задачи (2.1)–(2.3)$_K$ с параметром $\Lambda = \pi^2$, которое имеет линейный рост на бесконечности и допускает представление

$$\mathbf{W}_K(\eta) = \sin(\pi\eta_2)(\eta_1 - \mathbf{C}_K) + \widetilde{\mathbf{W}}_K(\eta), \tag{2.42}$$

где $\mathbf{C}_K$ *— некоторая постоянная, а остаток* $\widetilde{\mathbf{W}}_K \in \mathcal{W}^1_\beta(\Pi)$ *затухает на бесконечности со скоростью* $O\big(e^{-\eta_1\pi\sqrt{3}}\big)$ *и оказывается бесконечно дифференцируемым всюду на множестве* $\overline{\Pi}$, *кроме угловых точек* $\mathcal{P}_0$ *и* $\mathcal{P}_1$. *Подчеркнём, что функция* (2.42) *не попадает в пространство* $\mathcal{W}^{1,0}_{\beta\oplus}(\Pi)$, *и введем востребованную далее разность*

$$\widehat{\mathbf{W}}_K(\eta) = \mathbf{W}_K(\eta) - \sin(\pi\eta_2)\eta_1 = -\mathbf{C}_K\sin(\pi\eta_2) + \widetilde{\mathbf{W}}_K(\eta), \tag{2.43}$$

которая, обладает нужным далее поведением на бесконечности, принадлежит некому весовому пространству с отделённой асимптотикой, но не удовлетворяет краевому условию (2.3).

3. Отсутствие эффекта локализации

3.1. Привычные асимптотические конструкции. Приёмы, используемые в данном параграфе, широко известны в случае краевых условий Неймана на основаниях тонких областей (см. монографию [25] и приведенную в ней литературу), но их приспособление к условиям Дирихле требует минимальных усилий в случае перехода к смешанным краевым условиям исключительно благодаря постановке условий Неймана только на перпендикулярных основаниям боковых гранях многогранника Ω^ε. Переход к условиям Дирихле на всей границе $\partial\Omega$ требует лишь буквального повторения приведенных далее рассуждений и выкладок.

В ситуации (1.6) примем простейшие анзацы для собственных пар задачи (1.1)–(1.3)

$$\lambda^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\pi^2 + \mu + \ldots, \tag{3.1}$$

$$u^\varepsilon(x) = \sin\big(\pi\varepsilon^{-1}z\big)v(y) + \ldots, \tag{3.2}$$

где, как обычно, многоточие заменят младшие члены асимптотик. После подстановки анзацев в дифференциальное уравнение и краевые условия обнаруживаем, что главные асимптотические члены взаимно уничтожаются, а для пары $\{\mu; v\}$ получаем смешанную краевую задачу в квадрате

$$\begin{gathered} -\Delta_y v(y) = \mu v(y), \quad y \in \square_1, \\ v(y_1, \pm 1) = 0, \quad |y_1| < 1, \quad \pm\frac{\partial v}{\partial y_1}(\pm 1, y_2) = 0, \quad |y_2| < 1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Собственные пары этой задачи

$$\{\mu_{(p,q)}; v_{(p,q)}(y)\} = \left\{\frac{\pi^2}{4}(p^2+q^2), \cos\Big(\frac{\pi}{2}p(y_1-1)\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{2}q(y_2-1)\Big)\right\} \tag{3.4}$$

фигурируют в формулах (1.10) и (1.11). Перенумеруем собственные числа, составив монотонную неограниченную последовательность

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots \leqslant \mu_m \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{3.5}$$

Соответствующие собственные функции задачи (3.3) подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(v_m, v_n)_\omega = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Поясним выбор краевых условий: если условия Неймана получены в результате непосредственной подстановки анзаца (3.2) в краевое условие (1.3) на гранях (1.7), то условия Дирихле назначены для того, чтобы уменьшить невязки в краевом условии (1.2) на других гранях (1.6). Главный член невязки порождён формулой Тейлора

$$\begin{aligned} v_{(p,q)}(y) &= C_p(y_1)\sin\Big(\frac{\pi}{2}q(y_2-1)\Big) = C_p(y_1)\big(A_q^\pm(y_2\mp 1) + O(|y_2\mp 1|^3)\big) \\ &= \varepsilon C_p(y_1)\big(\mp A_q^\pm\eta_1^\pm + O(\varepsilon^2|\eta_1^\pm|^3)\big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь использованы растянутые координаты (1.15), а также функция и числа

$$C_p(y_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}p(y_1 - 1)\right) \quad \text{и} \quad A_q^\pm = \frac{\pi}{2}(\pm 1)^q q. \tag{3.8}$$

Слагаемые порядка ε из (3.7), умноженные на $\sin(\pi\eta_2^\pm)$ согласно анзацу (3.2), компенсируется пограничными слоями

$$\varepsilon\widetilde{w}^\pm(y_1, \eta^\pm) = \mp\varepsilon C_p(y_1) A_q^\pm \widetilde{\mathbf{W}}_D(\eta^\pm), \tag{3.9}$$

где $\widetilde{\mathbf{W}}_D$ — экспоненциально затухающий при $\eta_1^\pm \to +\infty$ остаток в решении (2.42) задачи (2.1)–(2.3)$_D$ при $\Lambda = \pi^2$.

В силу представления (2.42) функции (3.9) порождают дополнительные невязки в краевых условиях Дирихле на скошенных гранях (1.16), которые уничтожим посредством уточнения асимптотических анзацев (3.1) и (3.2) младшими членами $\varepsilon\mu'_{(p,q)}$ и $\varepsilon\sin(\pi\varepsilon^{-1}z)v'_{(p,q)}$ соответственно, отыскиваемыми из задачи

$$\begin{aligned}
&-\Delta_y v'_{(p,q)}(y) - \mu_{(p,q)} v'_{(p,q)}(y) = \mu'_{(p,q)} v_{(p,q)}(y), \quad y \in \square_1, \\
&v'_{(p,q)}(y_1, \pm 1) = \pm \mathbf{C}_D A_q^\pm C_p(y_1), \quad |y_1| < 1, \quad \pm\frac{\partial v'_{(p,q)}}{\partial y_1}(\pm 1, y_2) = 0, \quad |y_2| < 1.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Коэффициент $\mathbf{C}_D$ взят из представления (2.43) функции $\mathbf{W}_D$, а также краевого условия на торце γ полуполосы Π для экспоненциально затухающего остатка в этом представлении:

$$\widetilde{\mathbf{W}}_D(\eta) = \sin(\pi\eta_2)\big(\mathbf{C}_D - \eta_1\big) \quad \text{на} \quad \gamma.$$

В случае простого собственного числа $\mu_{(p,q)}$ условием разрешимости задачи (3.10) служит соотношение

$$\mu'_{(p,q)} = \mu'_{(p,q)}\|v_{(p,q)}; L^2(\square_1)\|^2 = \int_{-1}^{1} \sum_{\pm} \pm\frac{\partial v_{(p,q)}}{\partial y_2}(y) v'_{(p,q)}(y)\Big|_{y_2=\pm 1} dy_1 = \mathbf{C}_D \frac{\pi^2}{2} q^2. \tag{3.11}$$

В итоге число (3.11) и решение задачи (3.10), а также пограничные слои (3.9) определяют поправочные члены асимптотических анзацев. В случае кратного собственного числа $\mu_{(p,q)}$ процедура построения поправок немного усложняется (см. монографии [22, гл. 16], [25, гл. 7] и многие отдельные публикации), однако воспроизводить соответствующие рассуждения не будем, так как при выводе оценки остатка $\widetilde{\lambda}^\varepsilon_{(p,q)}$ в разложении (1.10) поправочные слагаемые не понадобятся.

Замечание 3.1. *В этом и следующем параграфах пограничные слои не возникают около граней (1.7) многогранника (1.4). Этому обстоятельству можно найти простое объяснение. Продолжим собственные функции u_m^ε задачи (1.1)–(1.3) по четности через плоскость $\{x : y_1 = 1\}$ и назначим на перпендикулярных оси абсцисс гранях многогранника $\{x : y_1 \in (-1, 3), |y_2| < 1 - z, z \in (0, \varepsilon)\}$ условия периодичности*

$$\begin{aligned}
&u^\varepsilon(+1, y_2, z) = u^\varepsilon(-1, y_2, z), \\
&\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_1}(+1, y_2, z) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_1}(-1, y_2, z), \quad z \in (0, \varepsilon), \quad |y_2| < 1 - z.
\end{aligned}$$

При этом собственные функции новой задачи приобретают гладкую и периодическую зависимость от переменной $y_1 \in [-1, 3]$, которая (зависимость) наследуется и собственными функциями исходной задачи в Ω^ε, а значит, пограничные слои в направлении оси y_1 возникнуть не могут.

3.2. Абстрактная формулировка исходной задачи. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon := H_0^1(\Omega^\varepsilon; \Gamma_D^\varepsilon)$ введем скалярное произведение

$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \big(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}, \tag{3.12}$$

а также положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$,

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \big(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon} \qquad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \tag{3.13}$$

Оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ компактный, т.е. согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 [30] его существенный спектр — точка $\tau = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность собственных чисел

$$\tau_1^\varepsilon \geqslant \tau_2^\varepsilon \geqslant \tau_3^\varepsilon \geqslant \ldots \geqslant \tau_m^\varepsilon \geqslant \ldots \to +0. \tag{3.14}$$

Сравнивая формулы (3.12), (3.13) и (1.9), видим, что вариационная постановка задачи (1.1)–(1.3) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon \quad \textit{в пространстве} \quad \mathcal{H}^\varepsilon$$

со спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = \big(\lambda^\varepsilon\big)^{-1}. \tag{3.15}$$

Следующее утверждение, известное как лемма о «почти собственных» числах и векторах (см. первоисточник [45]), обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, [30, гл. 6]).

Лемма 3.1. *Пусть $U^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon U^\varepsilon - t^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\epsilon\| =: \delta^\varepsilon \in [0, t^\varepsilon). \tag{3.16}$$

Тогда у оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ есть собственное число $\tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$, подчинённое неравенству

$$\big|t^\varepsilon - \tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon\big| \leqslant \delta^\varepsilon.$$

Более того, для любого $\delta_*^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, t^\varepsilon)$ найдётся столбец коэффициентов

$$\mathcal{C}^\varepsilon = \big(\mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \ldots, \mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon\big),$$

для которого выполнены соотношения

$$\Bigg\| U^\varepsilon - \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \mathcal{C}_\ell^\varepsilon \mathcal{U}_{(\ell)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \Bigg\| \leqslant 2\frac{\delta^\varepsilon}{\delta_*^\varepsilon}, \qquad \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \big|\mathcal{C}_\ell^\varepsilon\big|^2 = 1, \tag{3.17}$$

где $\tau_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \ldots, \tau_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ — набор всех собственных чисел (3.14) оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ из сегмента $\big[t^\varepsilon - \delta_*^\varepsilon, t^\varepsilon + \delta_*^\varepsilon\big]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \ldots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\big\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \big\rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}. \tag{3.18}$$

3.3. Асимптотика собственных чисел. В качестве компонент «почти собственной» пары $\{t_{(p,q)}^\varepsilon; U_{(p,q)}^\varepsilon\}$ возьмём выражения

$$t_{(p,q)}^\varepsilon = \varepsilon^2\big(\pi^2 + \varepsilon^2 \mu_{(p,q)}\big)^{-1}, \quad U_{(p,q)}^\varepsilon = \|v_{(p,q)}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} v_{(p,q)}^\varepsilon, \tag{3.19}$$

причём

$$\begin{aligned} v_{(p,q)}^\varepsilon(x) = \sin\Big(\pi\frac{z}{\varepsilon}\Big) X^\varepsilon(y_2)\Big(v_{(p,q)}(y) - \sum_\pm \chi_\pm(y_2) C_p(y_1) A_q^\pm(y_2 \mp 1)\Big) \\ + \varepsilon \sum_\pm \mp \chi_\pm(y_2) A_q^\pm C_p(y_1) \mathbf{W}_q(\eta^\pm). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь фигурируют собственная пара (3.4) задачи (3.3) с индексами $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$, величины (3.8) и (2.42), а также срезающие функции

$$\begin{gathered}\chi_\pm(y_2) = \chi(1 \mp y_2),\\ X^\varepsilon(y_2) = 1 \quad \text{при} \quad |y_2| \leqslant 1 - 2\varepsilon \quad \text{и} \quad X^\varepsilon(y_2) = 0 \quad \text{при} \quad |y_2| \geqslant 1-\varepsilon,\\ X^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leqslant X^\varepsilon(y_2) \leqslant 1, \quad \left|\frac{d^j X^\varepsilon}{dy_2^j}(y_2)\right| \leqslant c_j \varepsilon^{-j}, \quad j \in \mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Заметим, что, во–первых, благодаря выбору ингредиентов $v^\varepsilon_{(p,q)}$ и C_p функция (3.20) удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3), и во–вторых,

$$\frac{\partial v^\varepsilon_{(p,q)}}{\partial z}(x) - v_{(p,q)}(y)\frac{\pi}{\varepsilon}\cos\left(\frac{\pi}{\varepsilon}z\right) = O\big(\varepsilon + e^{-\frac{1-|y_2|}{\varepsilon}}\max\big\{1, (\varrho^\varepsilon_\pm)^{-\frac13}\big\}\big),$$

где $\varrho^\varepsilon_\pm = \big((|y_2| - 1 + \varepsilon)^2 + z^2\big)^{\frac12}/\varepsilon$ (ср. разложение (2.4)). Таким образом,

$$\left|\langle v^\varepsilon_{(p,q)}, v^\varepsilon_{(m,n)}\rangle_\varepsilon - \frac{\pi^2}{2\varepsilon}\delta_{p,m}\delta_{q,n}\right| \leqslant c_{pq,mn}\varepsilon,$$

и, в частности,

$$\begin{gathered}\left|\langle U^\varepsilon_{(p,q)}, U^\varepsilon_{(m,n)}\rangle_\varepsilon - \delta_{p,m}\delta_{q,n}\right| \leqslant C_{pq,mn}\varepsilon,\\ \|v^\varepsilon_{(p,q)}; \mathcal{H}^\varepsilon\| \geqslant \mathbf{c}_{(p,q)}\varepsilon^{-\frac12}, \quad \mathbf{c}_{(p,q)} > 0.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Обработаем величину $\delta^\varepsilon_{(p,q)}$ из формулы (3.16), вычисленную по паре (3.19). Имеем

$$\begin{aligned}\delta^\varepsilon_{(p,q)} &= \sup_{\dots} \left|\langle \mathcal{T}^\varepsilon U^\varepsilon_{(p,q)} - t^\varepsilon_{(p,q)}U^\varepsilon_{(p,q)}, \psi^\varepsilon\rangle_\varepsilon\right|\\ &= t^\varepsilon_{(p,q)}\|v^\varepsilon_{(p,q)}; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\sup_{\dots}\left|(\nabla_x v^\varepsilon_{(p,q)}, \nabla_x\psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\pi^2\varepsilon^{-2} + \mu_{(p,q)})(v^\varepsilon_{(p,q)}, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}\right|\\ &= t^\varepsilon_{(p,q)}\|v^\varepsilon_{(p,q)}; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\sup_{\dots}\left|((\Delta_x + \pi^2\varepsilon^{-2} + \mu_{(p,q)})v^\varepsilon_{(p,q)}, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}\right|.\end{aligned} \tag{3.23}$$

При этом супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$, т.е. $\|\psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leqslant 1$ и в силу одномерного неравенства Фридрихса выполнено соотношение

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\psi^\varepsilon(x)\right|^2 dydz \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^\varepsilon\int_{\square_1}\mathbf{h}_\varepsilon(y_2)^{-2}\left|\psi^\varepsilon(x)\right|^2 dydz \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left\|\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial z}; L^2(\Omega^\varepsilon)\right\|^2. \tag{3.24}$$

Здесь $\mathbf{h}_\varepsilon(y_2) = \min\{\varepsilon, 1 - |y_2|\}$ — «толщина» области (1.4) и $\square_1$ — её квадратное основание. Учитывая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $v_{(p,q)}$ и $\mathbf{W_D}$, а также формулы (2.42) и (2.43) для последней, обнаруживаем что первый сомножитель

$$I^\varepsilon_{(p,q)} = (\Delta_x + \pi^2\varepsilon^{-2} + \mu_{(p,q)})v^\varepsilon_{(p,q)}$$

в последнем скалярном произведении из (3.24) принимает вид

$$\begin{aligned}I^\varepsilon_{(p,q)} = &\sin\left(\pi\frac{z}{\varepsilon}\right)\left[\frac{d^2}{dy_2^2}, X^\varepsilon\right]\Big(v_{(p,q)} - \sum_\pm C_p A^\pm_q(y_2 \mp 1)\Big)\\ &+ \varepsilon\sum_\pm A^\pm_q C_p\left[\frac{d^2}{dy_2^2}, \chi_\pm\right]\widehat{\mathbf{W}}_D + \varepsilon\mu_{(p,q)}\sum_\pm A^\pm_q C_p\chi_\pm\widehat{\mathbf{W}}_D =: I^{1\varepsilon}_{(p,q)} + I^{2\varepsilon}_{(p,q)} + I^{3\varepsilon}_{(p,q)}.\end{aligned}$$

Благодаря формуле Тейлора (3.7) и оценке (3.24) получаем, что

$$\left|\big(I^{1\varepsilon}_{(p,q)}, \psi^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}\right| \leqslant c\Big(\operatorname{mes}_3 Y^\varepsilon \max_{y\in Y^\varepsilon}\sum_{j=0,1}\varepsilon^{-2j}(1 - |y_2|)^{4+2j}\Big)^{\frac12}\sup_{\dots}\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon^4.$$

В приведенных соотношениях $[\mathfrak{D}, \mathfrak{x}]$ — коммутатор дифференциального оператора $\mathfrak{D}$ со срезающей функцией $\mathfrak{x}$, Y^ε — множество

$$\operatorname{supp}|\nabla_x X^\varepsilon| = \{x : |y_1| \leqslant 1, |y_2| \in [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon], z \in (0,\varepsilon)\}$$

и его объём $\operatorname{mes}_3 Y^\varepsilon$ равен $4\varepsilon^2$. Поскольку $\operatorname{mes}_3 \operatorname{supp}|\nabla_x \chi_\pm| = O(\varepsilon)$ и функция $\widehat{\mathbf{W}}_D$ ограничена в полуполосе $\overline{\Pi}$, а её производная по η_1 исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью, обнаруживаем, что

$$\begin{aligned}&\big|\big(I^{2\varepsilon}_{(p,q)}, \psi^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}\big| + \big|\big(I^{3\varepsilon}_{(p,q)}, \psi^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon}\big|\\ &\qquad\leqslant c\varepsilon\Big(\big(\varepsilon^{-2}e^{-\frac{2\kappa}{3\varepsilon}} + 1 + \mu_{(p,q)}\big) \operatorname{mes}_3 \operatorname{supp}|\nabla_x\chi_\pm|\Big)^{\frac12} \sup_{\dots} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon^{\frac52}.\end{aligned}$$

В итоге при учёте формул (3.19) и (3.22) получаем для величины (3.23) оценку

$$\delta_{(p,q)} \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon^2\varepsilon^{\frac12}\varepsilon^{\frac52} = c_{(p,q)}\varepsilon^5, \tag{3.25}$$

а значит, по лемме 3.1 найдется собственное число $\tau_{n_{(p,q)}(\varepsilon)}$ оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, для которого (числа) выполнено неравенство

$$\big|\tau^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} - \varepsilon^2(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)})^{-1}\big| \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon^5. \tag{3.26}$$

Отсюда и из связи (3.15) спектральных параметров вытекает, что

$$\big|\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \mu_{(p,q)}\big| \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon^3\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)}\big(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)}\big). \tag{3.27}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}&\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{-2}\pi^2 + \mu_{(p,q)} + c_{(p,q)}\varepsilon^3\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)}\big(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)}\big)\\ &\Rightarrow \quad \lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2}\big(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)}\big) \quad \textit{при} \quad c_{(p,q)}\varepsilon^3\big(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)}\big) \leqslant \frac12.\end{aligned} \tag{3.28}$$

В итоге находим, что

$$\big|\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \mu_{(p,q)}\big| \leqslant 2c_{(p,q)}\varepsilon\big(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_{(p,q)}\big)^2 \tag{3.29}$$

или окончательно

$$\big|\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \mu_{(p,q)}\big| \leqslant C_{(p,q)}\varepsilon \quad \textit{при} \quad \varepsilon \in \big(0, \varepsilon_{(p,q)}\big] \tag{3.30}$$

с выбранными согласно формуле (3.28) положительными величинами $C_{(p,q)}$ и $\varepsilon_{(p,q)}$.

Для того чтобы убедится в совпадении собственных чисел задачи (1.1)–(1.3) из формул (1.10) и (3.30), понадобятся дополнительные выкладки и рассуждения.

Проверим, что собственному числу $\mu_{(p,q)}$ с кратностью $\varkappa_{(p,q)} > 1$ отвечают не менее $\varkappa_{(p,q)}$ разных собственных чисел $\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)}, \dots, \lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+\varkappa_{(p,q)}-1}$ из последовательности (1.8). Воспользуемся второй частью леммы 3.1 и обозначим через δ^ε максимальную из обработанных ранее величин $\delta^\varepsilon_{(p,q)}$, а через δ^ε_* — произведение $t^{-1}\delta^\varepsilon$ с множителем $t \in (0,1)$. Пусть ещё $\mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k}$, $k = 0, \dots, \varkappa_{(p,q)} - 1$, — суммы по $\ell = \mathcal{N}^\varepsilon, \dots, \mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1$ из первой формулы в списке (3.17), а $\mathcal{C}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$ — столбцы коэффициентов этих линейных комбинаций (при необходимости добавили нулевые члены для выравнивания размеров столбцов). Теперь в силу соотношений (3.18) и (3.22) находим, что

$$\begin{aligned}\big|(\mathcal{C}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j}, \mathcal{C}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k})_{\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}} - \delta_{j,k}\big| =& \big|\langle\mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j}, \mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k}\rangle_\varepsilon - \delta_{j,k}\big|\\ \leqslant& \big|\langle\mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j}, \mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j} - U^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k}\rangle_\varepsilon\big|\\ &+ \big|\langle\mathcal{S}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j} - U^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j}, U^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k}\rangle_\varepsilon\big|\\ &+ \big|\langle U^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+j}, U^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+k}\rangle_\varepsilon - \delta_{j,k}\big| \leqslant 2t + 2t + C_{(p,q)}\varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, при малых t и ε столбцы $\mathcal{C}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+1}, \dots, \mathcal{C}^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)+\varkappa_{(p,q)}-1}$ почти ортонормированы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$, что возможно лишь в случае

$$\varkappa_{(p,q)} \leqslant \mathcal{X}^\varepsilon.$$

Иными словами, зафиксировав подходящие $t \in (0,1)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{(p,q)}]$, обнаруживаем не менее $\varkappa_{(p,q)}$ разных собственных чисел оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, подчинённых оценке (3.26) с увеличенной в t^{-1} раз мажорантой. При помощи прежней выкладки (3.27), (3.28) выводим, что неравенству (3.30) с новыми положительными числами $C_{(p,q)}$ и $\varepsilon_{(p,q)}$ удовлетворяют не менее $\varkappa_{(p,q)}$ разных членов последовательности (1.8). Используя это наблюдение и перебирая собственные числа предельной задачи (3.3), не превосходящие $\mu_{(p,q)}$, получаем априорную оценку собственных чисел исходной задачи (1.1)–(1.3)

$$\lambda^\varepsilon_m \leqslant \varepsilon^{-2}\pi^2 + c_m. \tag{3.31}$$

3.4. Сходимости. Продолжим нормированную согласно равенству (1.17) при $j,k = m$ собственную функцию u^ε_m нулём с многогранника Ω^ε на параллелепипед

$$\Omega^\varepsilon_\square = (-1,1)^2 \times (0,\varepsilon)$$

и определим функции

$$u^{\varepsilon 0}_m(y) = \int\limits_0^\varepsilon S^\varepsilon(z) u^\varepsilon_m(y,z)dz, \qquad u^{\varepsilon\perp}_m(y,z) = u^\varepsilon_m(y,z) - S^\varepsilon(z)u^{\varepsilon 0}_m(y).$$

Здесь

$$S^\varepsilon(z) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\sin\Big(\pi\frac{z}{\varepsilon}\Big). \tag{3.32}$$

Понятно, что функция $u^{\varepsilon 0}_m$ обращается в нуль на сторонах $\upsilon^\pm_1$ квадрата $\square_1 = (-1,1)^2$ и попадает в пространство $H^1_0(\square_1; \upsilon^+_1 \cup \upsilon^-_1)$; здесь

$$\upsilon^\pm_k = \{y : |y_k| < 1, y_{3-k} = \pm 1\}, \quad k = 1,2. \tag{3.33}$$

Кроме того, справедливо условие ортогональности

$$\int\limits_0^\varepsilon S^\varepsilon(z) u^{\varepsilon\perp}_m(y,z)dz = 0 \quad \textit{при} \quad y \in \square_1, \tag{3.34}$$

а значит, неравенство Пуанкаре доставляет оценку

$$\|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}\|\partial_z u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2. \tag{3.35}$$

Верны соотношения

$$\begin{aligned}
&\|u^\varepsilon_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 = \|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2,\\
&\|\nabla_y u^\varepsilon_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 = \|\nabla_y u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \|\nabla_y u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2,\\
&\|\partial_z u^\varepsilon_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 = \|\partial_z u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \int\limits_0^\varepsilon \big(\partial_z S^\varepsilon(z)\big)^2 dz \|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2\\
&\qquad + 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon_\square} \partial_z u^{\varepsilon\perp}_m(x) u^{\varepsilon 0}_m(y)\partial_z S^\varepsilon(z)dx = \|\partial_z u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2
\end{aligned}$$

Последний интеграл по параллелепипеду $\Omega^\varepsilon_\square$ обратили в нуль посредством интегрирования по частям. Итак, придаём интегральному тождеству (1.9) с пробной функцией $\psi^\varepsilon = u^\varepsilon_m$ следующий вид:

$$\|\partial_z u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \|\nabla_y u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \|\nabla_y u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2$$
$$= \Big(\lambda^\varepsilon_m - \varepsilon^{-2}\pi^2\Big)\|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2 + \lambda^\varepsilon_m \|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2.$$

При учёте формул (3.31) и (3.35) выводим отсюда оценки

$$\begin{aligned} &\|\partial_z u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 - \lambda^\varepsilon_m \|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 + \|\nabla_y u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2 \\ &\qquad \leqslant \big(\lambda^\varepsilon_m - \varepsilon^{-2}\pi^2\big)\|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2 \leqslant c_m \|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1\|^2 \leqslant c_m \\ &\qquad \Rightarrow \quad \|\nabla_y u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\|^2 \leqslant c_m \quad \text{and} \\ &3\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}\|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 \leqslant \Big(4\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \lambda^\varepsilon_m\Big)\|u^{\varepsilon\perp}_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\square)\|^2 \leqslant c_m. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Таким образом, вдоль некоторой бесконечно малой положительной последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} &u^{\varepsilon 0}_m \quad \to \quad u^{00}_m \quad \textit{слабо в} \quad H^1_0(\square_1; \upsilon^+_1 \cup \upsilon^-_1) \quad \textit{и сильно в} \quad L^2(\square_1), \\ &\lambda^\varepsilon_m - \varepsilon^{-2}\pi^2 \quad \to \quad \mu^0_m, \quad \|u^{\varepsilon 0}_m; L^2(\square_1)\| \quad \to \quad 1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Теперь в интегральное тождество (1.9) подставим пробную функцию $\psi^\varepsilon = S^\varepsilon \varphi$, где $\varphi \in C^\infty_c\big(\overline{\square_1} \setminus (\upsilon^+_1 \cup \upsilon^-_1)\big)$. Как и ранее, условие ортогональности (3.34) показывает, что правая часть полученного соотношения

$$\big(\nabla_y u^{\varepsilon_j 0}_m, \nabla_y \varphi\big)_{\square_1} - \big(\lambda^{\varepsilon_j}_m - \varepsilon^{-2}\pi^2\big)\big(u^{\varepsilon_j 0}_m, \varphi\big)_{\square_1}$$
$$= \lambda^{\varepsilon_j}_m \big(u^{\varepsilon_j\perp}_m, S^\varepsilon\varphi\big)_{\Omega^\varepsilon_\square} - \big(\partial_z u^{\varepsilon_j\perp}_m, \varphi\partial_z S^\varepsilon\big)_{\Omega^\varepsilon_\square} - \big(\nabla_y u^{\varepsilon_j\perp}_m, S^\varepsilon \nabla_y \varphi\big)_{\Omega^\varepsilon_\square}$$

равна нулю, а значит, сходимости (3.37) обеспечивают интегральное тождество

$$\big(\nabla_y u^{00}_m, \nabla_y \varphi\big)_{\square_1} = \mu^0_m \big(u^{00}_m, \varphi\big)_{\square_1},$$

обслуживающее предельную задачу (3.3), так как по замыканию можно перейти к пробным функциям $\varphi \in H^1_0(\square_1; \upsilon^+_1 \cup \upsilon^-_1)$.

Лемма 3.2. *Предельные переходы* (3.37) *предоставляют собственную пару предельной задачи* (3.3), *причём собственная функция* u^{00}_m *нормирована в пространстве* $L^2(\square_1)$.

3.5. Финальные теоремы об асимптотике. Закончим оправдание асимптотических формул. В частности, нужно проверить, что номер $n_{(p,q)}(\varepsilon)$ собственного числа исходной задачи (1.1)–(1.3) в формуле (3.30) совпадает с номером m собственного числа $\mu_{(p,q)}$ предельной задачи (3.3) в монотонной последовательности (3.5). Рассуждения, приведшие к оценке (3.31), дают неравенство $n_{(p,q)}(\varepsilon) \geqslant m$. Предположим, что $n_{(p,q)}(\varepsilon) > m$ для бесконечно малой положительной последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда для номеров $j \in \mathbb{N}$ найдутся собственные числа $\lambda^{\varepsilon_j}_{\mathbf{n}_j} \leqslant \varepsilon^{-2}\pi^2 + \mu_{(p,q)} + c_{(p,q)}\varepsilon_j^{\frac{1}{2}}$, у которых собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности

$$(u^{\varepsilon_j}_{\mathbf{n}_j}, u^\varepsilon_q)_{\Omega^\varepsilon} = 0, \qquad q = 1, \dots, m + \varkappa_m - 1,$$

где $\varkappa_m$ — кратность собственного числа μ_m. В итоге предельные переходы (3.37) и оценки (3.36) предоставляют собственное число $\mu^{00} \leqslant \mu_m$ задачи (3.3), у которого собственная функция $u^{00} \in H^1_0(\square_1; \upsilon^+_1 \cup \upsilon^-_1)$ ортогональна в пространстве $L^2(\square_1)$ собственным функциям $v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, \dots, v_{m+\varkappa_m-1}$. Этот вывод противоречит способу построения последовательности (3.5), т.е. в самом деле $n_{(p,q)}(\varepsilon) = m$. Итак, справедлива

Теорема 3.1. *Члены последовательностей* (1.8) *и* (3.5) *собственных чисел задач* (1.1)–(1.3) *и* (3.3) *соответственно находятся в отношении*

$$\left|\lambda_m^\varepsilon - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \mu_m\right| \leqslant c_m\varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m],$$

где c_m *и* ε_m *— некоторые положительные числа.*

Теорему об асимптотике собственных функций задачи (1.1)–(1.3) сформулируем для простого ($p = 0$, $q \in \mathbb{N}$ или $p = q \in \mathbb{N}$) собственного числа задачи (3.3) — случай кратного собственного число обрабатывается похожим способом, однако с одной стороны финальная формула становится не столь явной, а с другой её вывод в похожих ситуациях публиковался многократно. Более того, ввиду симметрии области (1.4) некоторые кратные собственные числа (например, пара (p, q) включает нечётное и чётное числа) можно «расщепить» путём постановки[1] искусственных краевых условий Дирихле или Неймана на сечениях

$$\Upsilon_{0k}^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : y_k = 0\}, \quad k = 1, 2, \tag{3.38}$$

Теорема 3.2. *Пусть* μ_m *— простое собственное число задачи* (3.3), *а* v_m *— соответствующая собственная функция (см.* (3.4)*). Тогда знак нормированной в пространстве* $L^2(\Omega^\varepsilon)$ *собственной функции* u_m^ε *задачи* (1.1)–(1.3) *можно выбрать так, чтобы выполнялась асимптотическая формула*

$$\varepsilon\left\|\nabla_x\Big(u_m^\varepsilon - \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}} S^\varepsilon v_m\Big); L^2(\Omega^\varepsilon)\right\| + \left\|u_m^\varepsilon - \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}} S^\varepsilon v_m; L^2(\Omega^\varepsilon)\right\| \leqslant C_m\varepsilon, \tag{3.39}$$

где S^ε *— функция* (3.32), C_m *и* ε_m *— некоторые положительные числа и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 при некотором $h > 0$ интервал $\big(\varepsilon^{-2}\pi^2 + \mu_m - h, \varepsilon^{-2}\pi^2 + \mu_m + h\big)$ содержит единственное собственное число λ_m^ε. Связь (3.15) спектральных параметров показывает, что опять–таки при некотором $h > 0$ на замкнутый сегмент

$$\big[\varepsilon^2(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_m)^{-1} - \varepsilon^4 h, \varepsilon^2(\pi^2 + \varepsilon^2\mu_m)^{-1} + \varepsilon^4 h\big] \tag{3.40}$$

попадает единственное собственное число τ_m^ε оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$. В лемме 3.1 берем числа $\delta^\varepsilon \leqslant c_m\varepsilon^5$ и $\delta_*^\varepsilon = \varepsilon^4 h$ из формул (3.25) и (3.40). Тогда в суммах из соотношений (3.17) фигурирует одно слагаемое, а значит, справедливо неравенство

$$\left\|U_m^\varepsilon - \mathcal{C}_m\mathcal{U}_m^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\right\| \leqslant 2\,(\delta_*^\varepsilon)^{-1}\,\delta^\varepsilon \leqslant 2c_m h^{-1}\varepsilon, \tag{3.41}$$

причём $\mathcal{C}_m = \pm 1$ в зависимости от выбора знака у собственной функции $\mathcal{U}_m^\varepsilon$.

Осталось сравнить условия нормировок (1.17) и (3.6) собственных функций задач (1.1)–(1.3) и (3.3) с соотношением (3.18) для собственных векторов оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$: неравенство (3.41) влечёт за собой оценку (3.39). Отметим лишь, что $L^2(\Omega^\varepsilon)$–норма вычитаемого $\sqrt{2/\varepsilon}S^\varepsilon v_m$ в левой части (3.39) равна $1 + O(\varepsilon)$. □

4. Локализация около узких граней многогранника

4.1. Формальные асимптотические конструкции. В ситуации (1.5) сделаем растяжение координат (1.15) и перейдем формально к $\varepsilon = 0$. В обоих случаях $\pm$ область (1.4) трансформируется в множество $(-1, 1) \times \Pi \ni (y_1, \eta_1, \eta_2)$, где Π — заостренная полуполоса (1.14). На основании результатов из п. 1 §2 примем асимптотические анзацы

$$\lambda^\varepsilon(x) = \frac{\Lambda_1}{\varepsilon^2} + \mu + \ldots,$$

$$u^\varepsilon(x) = W_1\Big(\frac{1 \mp y_2}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\Big)w_\pm(y_1) + \ldots.$$

[1]Этот прием используется в следующих двух параграфах.

После их подстановки в исходную задачу (1.1)–(1.3) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра обнаруживаем, что множители при ε^{-2} в соотношении (1.1) взаимно уничтожаются, а множители при $1 = \varepsilon^0$ образуют обыкновенное дифференциальное уравнение на отрезке $(-1,1) \ni y_1$. При учёте краевых условий (1.3) на гранях (1.7) выводим две ($\vartheta = \pm$) предельные задачи Неймана

$$-\frac{\partial^2 w_\vartheta}{\partial y_1}(y_1) = \mu w_\vartheta(y_1), \quad y_1 \in (-1,1), \quad \pm\frac{\partial w_\vartheta}{\partial y_1}(\pm 1) = 0 \tag{4.1}$$

(ср. замечание 3.1). Далее индекс ϑ не пишем. Собственные пары

$$\{\mu_p; w_p\} = \left\{\frac{\pi^2}{4}p^2; \cos\left(\frac{\pi}{2}p(y_1 - 1)\right)\right\}$$

задачи (4.1) были помещены в разложения (1.12) и (1.13).

4.2. Асимптотика собственных чисел. Для того чтобы упростить обоснование асимптотик, воспользуемся симметрией области (1.4) относительно срединного сечения $\Upsilon^\varepsilon_{02}$ (прямоугольник из формулы (3.38)) и назначим искусственные краевые условия

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x) = 0 \quad \textit{или} \quad u^\varepsilon(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Upsilon^\varepsilon_{20}. \tag{4.2}$$

Напомним, что условия Неймана назначены на всей боковой поверхности (1.5), т.е. далее считаем, что соответственно

$$\Gamma^\varepsilon_{D+} = \{\partial\Omega^\varepsilon_+ : z \notin (0,\varepsilon)\} \quad \textit{или} \quad \Gamma^\varepsilon_{D+} = \{\partial\Omega^\varepsilon_+ : z \notin (0,\varepsilon)\} \cup \Upsilon^\varepsilon_{02}. \tag{4.3}$$

При этом исходная задача в многограннике Ω^ε сужена на его половину

$$\Omega^\varepsilon_+ = \{x \in \Omega^\varepsilon : y_2 > 0\}.$$

Далее будем использовать обозначение (1.1)–(1.3), (4.2) безотносительно к выбору искусственного краевого условия — оно не сказывается на асимптотических формулах. Вместе с тем чётное в случае $(4.2)_N$ и нечётное в случае $(4.2)_D$ продолжение собственной функции этой задачи с области Ω^ε_+ через ось абсцисс на область Ω^ε даёт (гладкую) собственную функцию исходной задачи (1.1)–(1.3).

Введем необходимые изменения в определения из п. 2 §3, но сохраним обозначения для гильбертова пространства $\mathcal{H}^\varepsilon$ со скалярным произведением $\langle , \rangle_\varepsilon$ и оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ в $\mathcal{H}^\varepsilon$.

В качестве «почти собственных» пар задачи в Ω^ε_+ возьмём

$$\{t^\varepsilon_p; U^\varepsilon_p\} = \left\{\varepsilon^2\left(\Lambda_1 + \varepsilon^2\mu_p\right)^{-1}; \|w^\varepsilon_p; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} w^\varepsilon_p\right\}, \tag{4.4}$$

где $p \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$w^\varepsilon_p(x) = \chi_+(y_2) W_1\Big(\frac{1 - y_2}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\Big) w_p(y_1), \tag{4.5}$$

а $\{\Lambda_1; W_1\}$ и $\{\mu_p; w_p\}$— собственные пары задач (2.1)–(2.3) и (4.1) соответственно. Наконец, χ_+ — срезающая функция из списка (3.21).

Отметим, что конструкции (4.4) и (4.5) одинаковы для обоих случаев (4.3), так как краевые условия на удалённой от граней (1.16) части границы $\partial\Omega^\varepsilon_+$ не влияют на главные члены асимптотики. При этом благодаря присутствию срезки χ_+ единственная невязка функции (4.5) в краевой задаче на Ω^ε_+ с параметром $\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\Lambda_1 + \mu_p$ появляется в дифференциальном уравнении:

$$(\Delta_x + \varepsilon^{-2}\Lambda_1 + \mu_p) v^\varepsilon_p(x) = \Big[\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}, \chi_+(y_2)\Big] W_1\Big(\frac{1 - y_2}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\Big) w_p(y_1).$$

Носитель этой невязки расположен на множестве $\left\{x \in \overline{\Omega^\varepsilon} : 1/3 \leqslant y_2 \leqslant \frac{2}{3}\right\} \supset \operatorname{supp}|\nabla_y \chi_+|$, где сомножитель W_1 оказывается экспоненциально малым согласно разложению (2.7).

Заметим, что

$$\|v_p^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|^2=\int_{-1}^{1}|w_p(y_1)|^2dy_1\int_{\Pi}\left|\nabla_\eta(\chi(\varepsilon^{-1}\eta_1)W_1(\eta))\right|^2d\eta=\Lambda_1+O(e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}}) \tag{4.6}$$

при некотором $\kappa>0$ (см. представление (2.7)), и обработаем величину δ_p^ε из формулы (3.16), найденную по паре (4.4). Имеем

$$\begin{aligned}\delta_p^\varepsilon=&\|\mathcal{T}^\varepsilon U_p^\varepsilon-t_p^\varepsilon U_p^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|=\sup_{\dots}\left|\langle\mathcal{T}^\varepsilon U_p^\varepsilon-t_p^\varepsilon U_p^\varepsilon,\psi^\varepsilon\rangle_\varepsilon\right|\\ =&t_p^\varepsilon\|v_p^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\sup_{\dots}\left|(\nabla_x v_p^\varepsilon,\nabla_x\psi^\varepsilon)_{\Omega_+^\varepsilon}-(\varepsilon^{-2}\Lambda_1+\mu_p)(v_p^\varepsilon,\psi^\varepsilon)_{\Omega_+^\varepsilon}\right|\\ =&t_p^\varepsilon\|v_p^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1}\sup_{\dots}\big|\big(\chi_+(\Delta_x+\varepsilon^{-2}\Lambda_1+\mu_p)(W_1w_p),\psi^\varepsilon\big)_{\Omega_+^\varepsilon}\\ &+([\Delta_x,\chi_+](W_1w_p),\psi^\varepsilon)_{\Omega_+^\varepsilon}\big|.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$, т.е. $\|\psi^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|\leqslant 1$, а значит,

$$\|\psi^\varepsilon;L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2\leqslant c_+\varepsilon^2\|\nabla_x\psi^\varepsilon;L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2=c_+\varepsilon^2\|\psi^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\|^2\leqslant c_+\varepsilon^2,\quad c_+>0. \tag{4.8}$$

Подчеркнём, что неравенство (4.8) отличается от неравенства (3.24), так как в ситуации (1.5) условия Дирихле не поставлены на гранях (1.16), но сама оценка (4.8) обеспечена предложением 2.1, причём, например, в ней можно взять $c_+=\Lambda_{\frac12}$.

По определению функций W_1 и w_p первое слагаемое в сумме между последними знаками модуля в (4.7) равно нулю. Следовательно, согласно формулам (4.4)–(4.6), (4.8) и (2.7) выполнено неравенство

$$\delta_p^\varepsilon\leqslant c_p'\varepsilon^2\big(\varepsilon(1+\varepsilon^{-2})e^{-\frac{2\kappa}{\varepsilon}}\big)^{\frac12}\sup_{\dots}\|\psi^\varepsilon;L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|\leqslant c_p\varepsilon^{\frac52}e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}}.$$

Итак, по лемме 3.1 найдется собственное число $\tau_{n_p(\varepsilon)}^\varepsilon$ оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, для которого верна оценка

$$\left|\tau_{n_p(\varepsilon)}^\varepsilon-t_p^\varepsilon\right|\leqslant c_p\varepsilon^{\frac52}e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}}. \tag{4.9}$$

В результате связь (3.16) спектральных параметров и аналогичные (3.26)–(3.29) преобразования устанавливают существования собственного числа $\lambda_{n_p(\varepsilon)}^\varepsilon$ задачи (1.1)–(1.3), (4.2) в области Ω_+^ε, удовлетворяющего соотношению

$$\left|\lambda_{Kn_p(\varepsilon)}^\varepsilon-\varepsilon^{-2}\Lambda_1-\mu_p\right|\leqslant C_p\varepsilon^{-\frac32}e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}}\quad \textit{при}\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_p]. \tag{4.10}$$

Здесь C_p и ε_p — некоторые положительные числа. Отметим, что соотношения (4.9) и (4.10) относятся к обоим искусственным краевым условиям (4.2), т.е. на самом деле формула (4.10) предоставляет два собственных числа исходной задачи в целой обрасти Ω^ε.

4.3. Сходимости. Замена координат (1.15) со знаком плюс, который далее не пишем, трансформирует область Ω_+^ε в множество $(-1,1)\times\Pi^{\frac{1}{\varepsilon}}$, а предложение 2.1 при любом $h>0$ и малых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_h]$, $\varepsilon_h>0$, даёт неравенство

$$\varepsilon^{-2}(\Lambda_1-h)\|\psi^\varepsilon;L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2\leqslant\|\nabla_x\psi^\varepsilon;L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2\quad\forall\psi^\varepsilon\in H_0^1(\Omega_+^\varepsilon;\Gamma_{D+}^\varepsilon). \tag{4.11}$$

Подставим в интегральное тождество (1.9), обслуживающее задачу (1.1)–(1.3), (4.2), пробную функцию $\psi^\varepsilon=E_\kappa^\varepsilon\mathbf{u}_m^\varepsilon$, где $\mathbf{u}_m^\varepsilon(x)=E_\kappa^\varepsilon(y)u_m^\varepsilon(x)$ и

$$E_\kappa^\varepsilon(y)=\begin{cases}e^{\frac{\kappa}{\varepsilon}(1-y_2)} & \text{при}\quad y_2\leqslant 1-\varepsilon,\\ e^{\kappa} & \text{при}\quad y_2\geqslant 1-\varepsilon,\end{cases} \tag{4.12}$$

а u_m^ε — нормированная в $L^2(\Omega_+^\varepsilon)$ собственная функция, отвечающая какому–то собственному числу

$$\lambda_m^\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-2}\Lambda_1 + \mathbf{c}_m. \tag{4.13}$$

При этом $\mathbf{c}_m \geqslant 0$, а $\varepsilon > 0$ — зафиксированное на время малое значение геометрического параметра. В частности, требованию (4.13) удовлетворяют собственные числа, фигурирующие в оценке (4.10).

Прокоммутировав оператор–градиент ∇_x с весовой функцией E_κ^ε несколько раз, приходим к равенству

$$\|\nabla_x \mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 - \|\mathbf{u}_m^\varepsilon E_{-\kappa}^\varepsilon \nabla_y E_\kappa^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 = \lambda_m^\varepsilon \|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2. \tag{4.14}$$

Заметим, что

$$E_{-\kappa}^\varepsilon(y)\big|\nabla_x E_\kappa^\varepsilon(y)\big| = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{\varepsilon} & \text{при} \quad y_2 \leqslant 1-\varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad y_2 \geqslant 1-\varepsilon, \end{cases} \tag{4.15}$$

и повторим с некоторыми изменениями вычисления, представленные в п. 4 §2. В результате выведем из формул (4.11)–(4.14) следующую весовую оценку, указывающую на концентрацию собственных функций обеих задач в области Ω_+^ε вблизи её грани Γ_+^ε.

Теорема 4.1. *Если собственное число λ_m^ε задачи* (1.1)–(1.3), (4.2) *подчинено соотношению* (4.13), *то соответствующая нормированная в $L^2(\Omega_+^\varepsilon)$ собственная функция u_m^ε удовлетворяет оценке*

$$\|E_\kappa^\varepsilon \nabla_x u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2}\|E_\kappa^\varepsilon u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 \leqslant \varepsilon^{-2}\mathbf{C}_m \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \tag{4.16}$$

где $E_\kappa^\varepsilon(y)$ — весовой множитель (4.12), *а κ и $\mathbf{C}_m$, ε_m — некоторые положительные числа.*

Доказательство. Введём тонкую треугольную призму $\triangle_+^\varepsilon = \{x \in \Omega_+^\varepsilon : y_2 > 1-\varepsilon\}$. Разность $\Omega_+^\varepsilon \setminus \overline{\triangle_+^\varepsilon}$ — параллелепипед высотой ε, а условия Дирихле на его основаниях обеспечивают неравенство Фридрихса

$$\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\|\nabla_x \mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|^2. \tag{4.17}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}\Lambda_1 e^{2\kappa} \geqslant & \varepsilon^{-2}\Lambda_1 e^{2\kappa}\|u_m^\varepsilon; L^2(\triangle_+^\varepsilon\|^2 \geqslant \varepsilon^{-2}\Lambda_1\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\triangle_+^\varepsilon\|^2 \\ = & \|\nabla_x \mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 - \|\mathbf{u}_m^\varepsilon E_{-\kappa}^\varepsilon \nabla_y E_\kappa^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|^2 - \lambda_m^\varepsilon\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|^2 \\ & - \big(\lambda_m^\varepsilon - \varepsilon^{-2}\Lambda_1\big)\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\triangle_+^\varepsilon)\|^2 \geqslant \delta\|\nabla_x \mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 \\ & + \Big((1-\delta)\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} - \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} - \lambda_m^\varepsilon\Big)\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|^2 + \mathbf{c}_m\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\triangle_+^\varepsilon)\|^2. \end{aligned}$$

Здесь были использованы формулы (4.15) и (4.17), (4.11). Осталось выбрать малые положительные величины δ и κ так, чтобы последний множитель при норме $\|\mathbf{u}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon \setminus \triangle_+^\varepsilon)\|$ превзошёл $(2\varepsilon)^{-2}(\pi^2 - \Lambda_1)$. Для оценки первого слагаемого в левой части (4.16) нужно ещё раз выполнить коммутирование, учесть формулу (4.15) и наложить ограничение $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

В силу замечания 3.1 собственная функция u_m^ε гладко зависит от переменной y_1. Введем функции

$$\begin{aligned} w_m^{\varepsilon 0}(y_1) &= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Pi W_1(\eta)\chi(\varepsilon\eta_1)u_m^\varepsilon(y_1, 1-\varepsilon\eta_1, \varepsilon\eta_2)d\eta, \\ w_m^{\varepsilon\perp}(y_1, \eta) &= \chi(\varepsilon\eta_1)\varepsilon^{-1}u_m^\varepsilon(y_1, 1-\varepsilon\eta_1, \varepsilon\eta_2) - W_1(\eta)w_m^{\varepsilon 0}(y_1). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Напомним, что $\chi(\varepsilon\eta_1) = \chi_+(y_1)$. В силу требования (2.6) и определений (4.18) выполнено условие ортогональности

$$\int\limits_{\Pi} W_1(\eta) w_m^{\varepsilon\perp}(y_1, \eta) d\eta = 0, \tag{4.19}$$

а значит, при учёте леммы 2.1 выводим неравенства

$$\begin{gathered}\Lambda_\perp \|w_m^{\varepsilon\perp}(y_1, \cdot); L^2(\Pi)\|^2 \leqslant \|\nabla_\eta w_m^{\varepsilon\perp}(y_1, \cdot); L^2(\Pi)\|^2 \\ \textit{при всех} \quad y_1 \in (-1, 1) \quad \textit{и каком–то} \quad \Lambda_\perp \in (\Lambda_1, \pi^2].\end{gathered} \tag{4.20}$$

Согласно нормировке (1.17), теореме 4.1 и соотношению (4.19) имеем

$$\begin{aligned}1 + O(e^{-\frac{\kappa}{3\varepsilon}}) &= \|\chi_+ u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 = \|w_m^{\varepsilon 0} + w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2 \\ &= \|w_m^{\varepsilon 0}; L^2(-1,1)\|^2 + \|w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Интегральному тождеству с пробной функцией $\varepsilon^{-2}\chi_+^2 u_m^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_+^\varepsilon; \Gamma_{D+}^\varepsilon)$ придаём вид

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-2}\big(u_m^\varepsilon \nabla_x \chi_+, \nabla_x(\chi_+ u_m^\varepsilon)\big)_{\Omega_+^\varepsilon} - \varepsilon^{-2}\big(\chi_+ \nabla_x u_m^\varepsilon, u_m^\varepsilon \nabla_x \chi_+\big)_{\Omega_+^\varepsilon} \\ &\quad = \varepsilon^{-2}\|\nabla_x(\chi_+ u_m^\varepsilon); L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 - \varepsilon^{-2}\lambda_m^\varepsilon \|\chi_+ u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 \\ &\quad = \varepsilon^{-2}\|\nabla_\eta(W_1 w_m^{\varepsilon 0} + w_m^{\varepsilon\perp}); L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 - \lambda_m^\varepsilon \|W_1 w_m^{\varepsilon 0} + w_m^{\varepsilon\perp}; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\|^2 \\ &\qquad + \varepsilon^{-2}\left\|\frac{\partial(\chi_+ u_m^\varepsilon)}{\partial y_1}; L^2(\Omega_+^\varepsilon)\right\|^2 \\ &\quad = \|w_m^{\varepsilon 0}; L^2(-1,1)\|^2 \|\nabla_\eta W_1; L^2(\Pi)\|^2 - \varepsilon^2 \lambda_m^\varepsilon \|w_p^{\varepsilon 0}; L^2(-1,1)\|^2 \\ &\qquad + \|\nabla_\eta w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2 - \varepsilon^2\lambda_m^\varepsilon \|w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2 \\ &\qquad + 2\int\limits_{-1}^{1} w_m^{\varepsilon 0}(y_1) \int\limits_{\Pi} \nabla_\eta W_1(\eta) \nabla_\eta w_m^{\varepsilon\perp}(y_1, \eta) d\eta dy_1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\frac{\partial}{\partial y_1}(\chi_+ u_m^\varepsilon); L^2(\Omega_+^\varepsilon)\right\|^2.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Оценка (4.16) показывает, что модуль левой части равенства (4.22) не превосходит величины $c_p\varepsilon^{-3}e^{-\frac{2\kappa}{3\varepsilon}}$. Интеграл по множеству $(-1,1)\times\Pi$ (предпоследний член в (4.22)) аннулируется при помощи интегрирования по частям, уравнения Гельмгольца для множителя W_1 и условия ортогональности (4.19). Последнее слагаемое отбрасываем ввиду ненадобности. Таким образом, в силу формулы (4.20) и ограничения (4.13) выводим оценку

$$\begin{aligned}c_m^\perp \|w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2 &\leqslant (\Lambda_\perp - \varepsilon^2\lambda_m^\varepsilon)\|w_m^{\varepsilon\perp}; L^2((-1,1)\times\Pi)\|^2 \\ &\leqslant (\varepsilon^2\lambda_m^\varepsilon - \Lambda_1)\|w_m^{\varepsilon 0}; L^2(-1,1)\|^2 + c_m\varepsilon^{-3}e^{-\frac{2\kappa}{3\varepsilon}} \leqslant C_m\varepsilon^2\end{aligned} \tag{4.23}$$

с некоторым не зависящим от малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$ множителем

$$\frac{c_m^\perp(\Lambda_\perp - \Lambda_1)}{2} > 0.$$

Проведенные выкладки показывают, что вдоль бесконечно малой положительной последовательности $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned}&\lambda_m^\varepsilon - \varepsilon^{-2}\Lambda_1 \quad \to \quad \mu_m^{00}, \\ &w_m^{\varepsilon 0} \quad \to \quad w_m^{00} \qquad \textit{сильно в} \quad L^2(-1,1), \quad \textit{причём} \quad \|w_m^{00}; L^2(-1,1)\| = 1.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Возьмём какую–то бесконечно дифференцируемую функцию Ψ переменной $y_1 \in [-1, 1]$, удовлетворяющую условиям

$$\pm\frac{d\Psi}{dy_1}(\pm 1) = 0, \tag{4.25}$$

и умножим уравнение Гельмгольца для собственной пары $\{\lambda_m^\varepsilon; u_m^\varepsilon\}$ на $\varepsilon^{-1}\chi_+ W_1 \Psi$. Проинтегрировав по частям в области Ω_+^ε и выполнив дифференцирование, получим равенство

$$\int_{-1}^{1} \left(\left(\lambda_m^\varepsilon - \frac{\Lambda_1}{\varepsilon^2} \right) \Psi(y_1) + \frac{d^2\Psi}{dy_1^2}(y_1) \right) \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Pi} W_1(\eta)\chi_+(y_2) u_m^\varepsilon(y,z)\, dy_1 dz dy_1$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_+^\varepsilon} \Psi(y_1) u_m^\varepsilon(x) \Big[\frac{d^2}{dy_2^2}, \chi_+(y_2) \Big] W_1(\eta)\, dx.$$

Правая часть — бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$ в силу экспоненциального затухания функций u_m^ε и W_1 (теорема 4.1 и формула (2.7)). Сходимости (4.24) позволяют перейти к пределу в левой части и при учете первого определения (4.18) получить соотношение

$$\int_{-1}^{1} w_m^{00}(y_1) \left(\mu_m^{00} \Psi(y_1) + \frac{d^2\Psi}{dy_1^2}(y_1) \right) dy_1 = 0,$$

из которого ввиду произвольности пробной функции $\Psi \in C^\infty[-1,1]$, подчинённой только граничным условиям (4.24), вытекают включение $w_m^{00} \in H^2(-1,1)$, а также дифференциальное уравнение и краевые условия в задаче (4.1) (ср. процедуру поднятия гладкости в [15, гл. 2]).

Лемма 4.1. *Предельные переходы (4.24) предоставляют собственную пару $\{\mu_m^{00}; w_m^{00}\}$ предельной задачи (4.1), причём в силу формул (4.21) и (4.23) собственная функция w_p^{00} нормирована в пространстве $L^2(-1,1)$.*

4.4. Теорема об асимптотике. Ставшие уже стандартными рассуждения из п. 5 §3 с упрощениями, вызванными постановкой искусственных краевых условий (4.2) и простотой собственных чисел предельной задачи (4.1), приводят к следующим утверждениям о собственных парах исходной задачи (1.1)–(1.3) в цельной области Ω^ε.

Теорема 4.2. *В ситуации (1.5) при любом $p \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины c_p, C_p и ε_p, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p]$ для собственных чисел $\lambda_{(p,1)}^\varepsilon := \lambda_{2p}^\varepsilon$ и $\lambda_{(p,2)}^\varepsilon := \lambda_{2p-1}^\varepsilon$ из последовательности (1.8) выполнено представление (1.12), где модули остатков $\widetilde{\lambda}_{(p,j)}^\varepsilon$ не превосходят выражения $c_p \varepsilon^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}}$, а для нормированных в $L^2(\Omega^\varepsilon)$ собственных функций $u_{p,1}^\varepsilon = u_{2p}^\varepsilon$ и $u_{p,2}^\varepsilon = u_{2p-1}^\varepsilon$, чётной и нечётной относительно переменной y_2, — представления (1.13), в которых $K_{p,1}^\pm = 2^{-\frac{1}{2}}$, $K_{p,2}^\pm = \pm 2^{-\frac{1}{2}}$ и*

$$\varepsilon \big\| \nabla_x \widetilde{u}_{p,j}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon) \| + \big\| \widetilde{u}_{p,j}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon) \| \leqslant C_p \varepsilon^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}}.$$

В формулах (1.12) и (1.13) фигурирует собственная пара $\{\Lambda_1; W_1\}$ задачи (2.1)–(1.13), предоставленная леммой 2.1.

4.5. Другие асимптотические серии собственных чисел. Формальные асимптотические конструкции из п. 1 §3 без труда приспосабливаются к задаче (1.1)–(1.3) в ситуации (1.5), и в результате для членов асимптотических анзацев (3.1) и (3.2) выводится предельная задача (3.3). Несколько неожиданным оказывается то, что, несмотря на постановку условий Неймана (1.3) на гранях $\Gamma_\pm^\varepsilon$, сохраняются условия Дирихле на сторонах $\upsilon_1^\pm$ квадрата $\square_1$ (ср. формулы (1.16) и (3.33)). Причина кроется в том, что согласно общим принципам из [22, гл. 16] и [41] за постановку краевых условий в предельной задаче для тонкой области отвечают не тип краевых условий на торце, а явление порогового резонанса в задаче о пограничном слое. Такой резонанс отсутствует в обеих задачах (2.1)–$(2.3)_{N,D}$ на полуполосе Π (см. п. 5, §2), что и обеспечивает в обеих ситуациях краевое условие Дирихле на сторонах $\upsilon_1^\pm$.

Замечание 4.1. *Для того же вывода о предельных краевых условиях на $\upsilon_1^{\pm}$ можно воспользоваться методами составных и сращиваемых асимптотических разложений (см., например, монографии [22], [24] и [46], [47] соответственно). В самом деле, главный член невязки слагаемого* $\sin(\pi z/\varepsilon)v(y)$ *в краевом условии* (1.3) *на грани* $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ *равен* $2^{-\frac{1}{2}}\pi\varepsilon^{-1}\cos(\pi z/\varepsilon)v(y)$ *и в первом методе для уменьшения невязки требуется именно условие Дирихле. В рамках второго метода требуется произвести сращивание выражения* $\sin(\pi z/\varepsilon)v(y_1,\pm 1)$ *с каким-либо решением задачи* (2.1)–(2.3)$_N$ *в полуполосе* Π, *но в связи с отсутствием порогового резонанса у этой задачи имеется только тривиальное ограниченное решение и потому приходится положить* $v(y_1,\pm 1)=0$.

Повторение выкладок и рассуждений из п. 3 §3 при использовании функции $\mathbf{W}_N$ вместо функции $\mathbf{W}_D$ (см. формулу (2.42) в замечании 2.2) получаем следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Для любого* $m\in\mathbb{N}$ *найдутся такие положительные величины* c_m *и* ε_m, *а также номер* $n_m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, *что для собственного числа задачи* (1.1)–(1.3) *выполнено соотношение*

$$\left|\lambda_{n_m(\varepsilon)}^{\varepsilon}-\varepsilon^{-2}\pi^2-\mu_m\right|\leqslant c_m\varepsilon \quad \textit{при} \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_m], \tag{4.26}$$

где μ_m — *член последовательности* (3.5) *предельной задачи* (3.3) *на квадрате* $\square_1$.

В отличие от теоремы 3.1 в теореме 4.3 номер $n_m(\varepsilon)$ фигурирующего в формуле (4.26) собственного числа $\lambda_{n_m(\varepsilon)}^{\varepsilon}$ не определен. Это обстоятельство объясняется тем, что согласно теореме 4.2 в последовательности (1.8) имеются собственные числа порядка $\varepsilon^{-2}\Lambda_1$, меньшего, чем $\varepsilon^{-2}\pi^2$, и количество таких чисел на интервале $(0,\varepsilon^{-2}\pi^2)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon\to+0$. Таким образом, номер $n_m(\varepsilon)$ зависит от параметра ε и также стремится к бесконечности при его уменьшении. Иными словами, теоремы 4.2 и 4.3 описывают различные асимптотики собственных чисел задачи (1.1)–(1.3) из условных низко– и среднечастотных диапазонов спектра соответственно.

5. Локализация около коротких ребер многогранника

5.1. Формальные асимптотические конструкции. Теперь область Ω^{ε} на рис. 3, а, задана равенством (1.23), и для упрощения асимптотических процедур назначим на обоих срединных сечениях (3.38) искусственные краевые условия Дирихле или Неймана (всего четыре варианта). Сузим задачу (1.1)–(1.3) на подобласть $\Omega_{\#}^{\varepsilon}=\{x\in\Omega^{\varepsilon}: y_j<0, j=1,2\}$ и припишем к её номеру, а также её атрибутам нижний индекс $\#$ — тип искусственных краевых условий не влияет на дальнейшие рассуждения, выкладки и результаты. Введённые для этой задачи в п. 2 §3 объекты также снабдим индексом $\#$ и в качестве «почти собственной» пары возьмём

$$\left\{t_{1\#}^{\varepsilon};U_{1\#}^{\varepsilon}(x)\right\}=\left\{\varepsilon^2M_1^{-1};\|\chi_{\#}V_1;\mathcal{H}^{\varepsilon}\|^{-1}\chi_{\#}(y)V_1(\xi)\right\}. \tag{5.1}$$

Здесь $\{M_1;V_1\}$ — собственная пара задачи (2.13) в четверти слоя (1.20), предоставленная теоремой 2.2, растянутые координаты ξ имеют вид (2.12) и $\chi_{\#}(y)=\chi(r)$, причём $r=|y-\mathcal{P}^{--}|$ — полярный радиус, $\mathcal{P}^{--}=(-1,-1)$ — вершина квадрата $\square_1$ и χ — срезающая функция (2.5). В силу теоремы 2.3 нормированная в $L^2(\Xi)$ собственная функция V_1 затухает при $|\xi|\to+\infty$ с экспоненциальной скоростью, а значит, справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\|\chi_{\#}V_1;\mathcal{H}^{\varepsilon}\|^2=\varepsilon\left(M_1+O(e^{-\frac{\kappa}{\varepsilon}})\right),\\
&\|(\Delta_x+\varepsilon^{-2}M_1)(\chi_{\#}V_1);L^2(\Omega_{\#}^{\varepsilon})\|^2=\|[\Delta_x,\chi_{\#}]V_1;L^2(\Omega_{\#}^{\varepsilon})\|^2\\
&\qquad\qquad\leqslant c\varepsilon(\varepsilon^{-2}+1)e^{-\frac{2\kappa}{3\varepsilon}}\leqslant C\varepsilon^{-1}e^{-\frac{2\kappa}{3\varepsilon}},
\end{aligned}$$

где $\varkappa > 0$ — показатель из формулы (2.35). Таким образом, лемма 3.1 предоставляет собственное число оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, подчинённое неравенству

$$\left|\tau^\varepsilon_{n(\varepsilon)\#} - \varepsilon^2 M_1^{-1}\right| \leqslant c\varepsilon e^{-\frac{\varkappa}{3\varepsilon}}.$$

Благодаря связи (3.16) спектральных параметров аналогичные (3.26)–(3.29) выкладки показывают, что

$$\left|\lambda^\varepsilon_{n(\varepsilon)\#} - \varepsilon^{-2} M_1\right| \leqslant c_1\varepsilon^{-3} e^{-\frac{\varkappa}{3\varepsilon}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \tag{5.2}$$

причём c_1 и ε_1 — некоторые положительные числа.

5.2. Обоснование асимптотики. Поскольку кратность дискретного спектра задачи (2.13) осталась неизвестной, обычный способ проверки равенства $n(\varepsilon) = 1$ в оценке (5.2), в частности, доказательства теоремы о сходимости, не годится. Изберем иной путь.

Прежде всего, в силу минимального принципа [30, теорема 10.2.1] получим соотношение

$$\begin{aligned}\lambda_1^\varepsilon &= \min_{\psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon} \frac{\|\nabla_x \psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2}{\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2} \leqslant \frac{\|\nabla_x(\chi_\# V_1); L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2}{\|\chi_\# V_1; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon\|\nabla_\xi V_1; L^2(\Xi)\|^2 + c_V^1 \varepsilon e^{-\frac{2\varkappa}{3\varepsilon}}}{\varepsilon^3\|V_1; L^2(\Xi)\|^2 + c_V^0 \varepsilon e^{-\frac{2\varkappa}{3\varepsilon}}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(M_1 + C_V \varepsilon^{-2} e^{-\frac{\varkappa}{3\varepsilon}}\right).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Теперь убедимся в том, что собственные функции $u^\varepsilon_{m\#}$ быстро затухают при удалении от точки $\mathcal{P}^{++}$ — способ проверки этого свойства перекликается с доказательствами теорем 2.3 и 4.1.

Теорема 5.1. *Пусть $\lambda^\varepsilon_{m\#}$ — собственное число задачи (1.1)–(1.3)$_\#$ в подобласти $\Omega^\varepsilon_\#$ с какими–либо искусственными краевыми условиями и выполнено неравенство*

$$\varepsilon^2 \lambda^\varepsilon_{m\#} \leqslant \Lambda_1 - \delta_\# \quad \text{при} \quad \delta_\# > 0.$$

Тогда для соответствующей нормированной в пространстве $L^2(\Omega^\varepsilon_\#)$ собственной функции $u^\varepsilon_{m\#}$ верна весовая оценка

$$\|e^{\frac{\varkappa_{m\#} r}{\varepsilon}} \nabla_x u^\varepsilon_{m\#}; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2 + \varepsilon^{-2}\|e^{\frac{\varkappa_{m\#} r}{\varepsilon}} u^\varepsilon_{m\#}; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2 \leqslant C_{m\#}\varepsilon^{-2}, \tag{5.4}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{m\#}]$, а $\varkappa_{m\#}$, $\varepsilon_{m\#}$ и $C_{m\#}$ — некоторые положительные числа.

Доказательство. В интегральное тождество (1.9)$_\#$, обслуживающее задачу (1.1)–(1.3)$_\#$ в области $\Omega^\varepsilon_\#$, подставим произведение $\psi^\varepsilon = e^{\frac{2\varkappa r}{\varepsilon}} u^\varepsilon_{m\#}$ с каким–то показателем $\varkappa > 0$ и после несложных преобразований получим для функции $\mathbf{u}^\varepsilon_m = e^{\frac{\varkappa r}{\varepsilon}} u^\varepsilon_{m\#}$ равенство

$$\|\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2 - \|\mathbf{u}^\varepsilon_m e^{-\frac{\varkappa r}{\varepsilon}} \nabla_x e^{\frac{\varkappa r}{\varepsilon}}; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2 = \lambda^\varepsilon_{m\#}\|\mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2. \tag{5.5}$$

Заметим, что

$$e^{-\frac{\varkappa r}{\varepsilon}}|\nabla_x e^{\frac{\varkappa r}{\varepsilon}}| = \varkappa\varepsilon^{-1}, \tag{5.6}$$

и разобьём множество $\Omega^\varepsilon_\#$ на четыре части, а именно, $\Xi^\varepsilon(R) = \{x : \xi \in \Xi(R)\}$ (ср. определение (2.23)), $K^\varepsilon_R = \Omega^\varepsilon_\# \setminus (\Sigma^{1\varepsilon}_R \cup \Sigma^{2\varepsilon}_R)$ и

$$\Sigma^{1\varepsilon}_R = \{x \in \Omega^\varepsilon_\# : 1 + y_1 > \varepsilon(R-1), 1 + y_2 < \varepsilon R\},$$
$$\Sigma^{2\varepsilon}_R = \{x \in \Omega^\varepsilon_\# : 1 + y_1 < \varepsilon(R-1), 1 + y_2 > \varepsilon R\}.$$

Как и в п. 4 §2, размер $R > 1$ выберем так, чтобы при учёте предложения 2.1 выполнить оценки

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\Lambda_1 - \frac{\delta_\#}{2}\right)\|\mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(\Sigma^{j\varepsilon}_R)\|^2 \leqslant \|\nabla_x \mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(\Sigma^{j\varepsilon}_R)\|^2, \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, одномерное неравенство Фридрихса на отрезке $(0, \varepsilon) \ni z$ показывает, что

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(K^\varepsilon_R)\|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\|\partial_z \mathbf{u}^\varepsilon_m; L^2(K^\varepsilon_R)\|^2.$$

Теперь равенства (5.5) и (5.6) влекут за собой соотношение

$$\begin{aligned}
e^{2\sqrt{2}\kappa R}\big(\lambda^\varepsilon_{m\#}+\kappa^2\varepsilon^{-2}\big) \geqslant & e^{2\sqrt{2}\kappa R}\big(\lambda^\varepsilon_{m\#}+\kappa^2\varepsilon^{-2}\big)\|u^\varepsilon_{m\#};L^2(\Xi^\varepsilon(R))\|^2\\
&\geqslant\big(\lambda^\varepsilon_{m\#}+\kappa^2\varepsilon^{-2}\big)\|\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(\Xi^\varepsilon(R))\|^2=\|\nabla_x\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2\\
&\quad-\lambda^\varepsilon_{m\#}\|\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(\Omega^\varepsilon_\#\setminus\Xi^\varepsilon(R))\|^2-\|\mathbf{u}^\varepsilon_m e^{-\frac{\kappa r}{\varepsilon}}\nabla_x e^{\frac{\kappa r}{\varepsilon}};L^2(\Omega^\varepsilon_\#\setminus\Xi^\varepsilon(R))\|^2\\
&\geqslant\delta\|\nabla_x\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2+\Big((1-\delta)\frac{\pi^2}{\varepsilon^2}-\lambda^\varepsilon_{m\#}-\frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}\Big)\|\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(K^\varepsilon_R)\|^2\\
&\quad+\Big(\frac{1-\delta}{\varepsilon^2}\Big(\Lambda_1-\frac{\delta_\#}{2}\Big)-\lambda^\varepsilon_{m\#}-\frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}\Big)\sum_{j=1,2}\|\mathbf{u}^\varepsilon_m;L^2(\Sigma^{j\varepsilon}_R)\|^2.
\end{aligned}$$

Осталось взять положительные $\delta=\delta_{m\#}>0$ и $\kappa=\kappa_{m\#}>0$ настолько малыми, чтобы коэффициенты при квадратах лебеговых нормах функции $\mathbf{u}^\varepsilon_m$ в правой части превзошли величину $c_{\delta,\kappa}\varepsilon^{-2}$ с некоторым множителем $c_{\delta,\kappa}>0$. Теорема доказана. □

Теперь применим минимальный принцип [30, теорема 10.2.1] к оператору задачи (2.13) в четверти слоя Ξ

$$M_1=\min_{\Psi\in H^1(\Xi;\Upsilon)}\frac{\|\nabla_\xi\Psi;L^2(\Xi)\|^2}{\|\Psi;L^2(\Xi)\|^2}. \tag{5.7}$$

В качестве пробной возьмём функцию $\Xi\ni\xi\mapsto\Psi^\varepsilon(\xi)=\chi_\#(y)u^\varepsilon_{1\#}(x)$ (связь систем координат ξ и x указана формулой (2.12)). При учёте теоремы 5.1 имеем

$$\begin{aligned}
\|\Psi^\varepsilon;L^2(\Xi)\|^2&\geqslant\varepsilon^{-3}\|u^\varepsilon_{1\#};L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2-\varepsilon^{-3}\|(1-\chi^2_\#)^{\frac12}u^\varepsilon_{1\#};L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2\\
&\geqslant\varepsilon^{-3}-c_0\varepsilon^{-3}e^{-\frac{2\kappa_{1\#}}{3\varepsilon}},\\
\|\nabla_\xi\Psi^\varepsilon;L^2(\Xi)\|^2&\leqslant\varepsilon^{-1}\|\nabla_x u^\varepsilon_{1\#};L^2(\Omega^\varepsilon_\#)\|^2+\varepsilon^{-1}\big(2\chi_\#\nabla_x u^\varepsilon_{1\#}+u^\varepsilon_{1\#}\nabla_x\chi_\#,u^\varepsilon_{1\#}\nabla_x\chi_\#\big)_{\Omega^\varepsilon_\#}\\
&\leqslant\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon_{1\#}+c_1\varepsilon^{-3}e^{-\frac{2\kappa_{1\#}}{3\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Из этих оценок и равенства (5.7) выводим соотношение

$$\frac{M_1}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{\lambda^\varepsilon_{1\#}+c_1\varepsilon^{-2}e^{-\frac{2\kappa_{1\#}}{3\varepsilon}}}{1-c_0e^{-\frac{2\kappa_\#}{3\varepsilon}}}\leqslant\lambda^\varepsilon_{1\#}+C\varepsilon^{-2}e^{-\frac{2\kappa_\#}{3\varepsilon}}. \tag{5.8}$$

Формулы (5.3) и (5.8), а также проверяемое ниже неравенство (5.9) показывают, что в оценке (5.2) можно взять $n(\varepsilon)=1$. Используя чётные и нечётные продолжения собственных функций $u^\varepsilon_{1\#}$ через сечения (3.38), на которых были назначены искусственные краевые условия Дирихле и Неймана, получаем асимптотику первых четырёх собственных чисел задачи (1.1)–(1.3) в цельной области Ω^ε — благодаря свойствам чётности/нечётности соответствующие собственные функции линейно независимы.

Теорема 5.2. *Для первых четырёх членов последовательности* (1.8) *собственных чисел задачи* (1.1)–(1.3) *в области* (1.23) *верны асимптотические формулы* (1.25), *причём для остатков* $\widetilde\lambda^\varepsilon_k$ *верны оценки*

$$\big|\widetilde\lambda^\varepsilon_k\big|=\big|\lambda^\varepsilon_k-\varepsilon^{-2}M_1\big|\leqslant c_\sharp\varepsilon^{-2}e^{-\frac{2\kappa_\sharp}{3\varepsilon}}\quad\textit{при}\quad\varepsilon\in(0,\varepsilon_\sharp]\quad\textit{и}\quad k=1,2,3,4,$$

где M_1 *— первое собственное число задачи* (2.13), *а* $c_\sharp$, $\kappa_\sharp$ *и* $\varepsilon_\sharp$ *— некоторые положительные величины.*

Доказательство. Осталось убедиться в том, что для второго собственного числа $\lambda^\varepsilon_{2\#}$ задачи (1.1)–(1.3)$_\#$ выполнено неравенство

$$\lambda^\varepsilon_{2\#}\geqslant\varepsilon^{-2}M_\perp, \tag{5.9}$$

при некотором $M_\perp \in (M_1, \Lambda_1)$. Предположим, что соотношение (5.9) нарушено, т.е. нашлась бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой

$$\varepsilon_j^2 \lambda_{2\#}^{\varepsilon_j} \to M_1 \quad \textit{при} \quad j \to +\infty \quad (\textit{или} \quad \varepsilon_j \to +0). \tag{5.10}$$

Удалив при необходимости несколько членов последовательности, будем считать, что $\varepsilon_j^2 \lambda_{2\#}^{\varepsilon_j} \leqslant (M_1 + \Lambda_1)/2$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и далее этот индекс не пишем.

По собственным функциям $u_{1\#}^\varepsilon$ и $u_{2\#}^\varepsilon$, подчинённым соотношениям

$$\big(u_{j\#}^\varepsilon, u_{k\#}^\varepsilon\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} = \delta_{j,k}, \qquad j,k = 1,2,$$

определим функции на четверти слоя Ξ

$$w_{j\#}^\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \chi_\#(y) u_{j\#}^\varepsilon(x), \qquad j = 1,2.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\big|\big(w_{j\#}^\varepsilon, w_{k\#}^\varepsilon\big)_\Xi - \delta_{j,k}\big| \leqslant c\varepsilon^{-2} e^{-\frac{\kappa_\#}{3\varepsilon}}, \\ &\big|\big(\nabla_\xi w_{j\#}^\varepsilon, \nabla_\xi w_{k\#}^\varepsilon\big)_\Xi - \lambda_{j\#}^\varepsilon \delta_{j,k}\big| \leqslant c e^{-\frac{\kappa_\#}{3\varepsilon}}, \quad j,k = 1,2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Первое вытекает непосредственно из оценки (5.4), а для вывода второго нужно дополнительно принять во внимание интегральное тождество

$$\big(\nabla_x u_{j\#}^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} = \lambda_{j\#}^\varepsilon \big(u_{j\#}^\varepsilon, \psi^\varepsilon\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} \tag{5.12}$$

с пробной функцией $\psi^\varepsilon = \chi_\#^2 u_{j\#}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\#^\varepsilon; \Gamma_D^\varepsilon)$, которое, как обычно, следует превратить в равенство

$$\begin{aligned} \big(\nabla_x(\chi_\# u_{j\#}^\varepsilon), \nabla_x(\chi_\# u_{k\#}^\varepsilon)\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} &- \lambda_{j\#}^\varepsilon \big(\chi_\# u_{j\#}^\varepsilon, \chi_\# u_{j\#}^\varepsilon\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} \\ &= \big(u_{j\#}^\varepsilon \nabla_x \chi_\#, \nabla_x(\chi_\# u_{k\#}^\varepsilon)\big)_{\Omega_\#^\varepsilon} - \big(\chi_\# \nabla_x u_{j\#}^\varepsilon, u_{k\#}^\varepsilon \nabla_x \chi_\#\big)_{\Omega_\#^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$ в интегральном тождестве (5.12) с пробной функцией $\psi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Psi(\xi)$, где $\Psi \in C_c^\infty(\Xi \cup \Theta)$. В результате для функций

$$w_{j\#}^0 = \lim_{\varepsilon \to +0} w_{j\#}^\varepsilon \quad \textit{слабо в} \quad H_0^1(\Xi; \Upsilon)$$

получим согласно формулам (5.3), (5.8), (5.10) и (5.11) соотношения

$$\begin{aligned} &(\nabla_\xi w_{p\#}^0, \nabla_\xi \Psi)_\Xi = M_1 (w_{p\#}^0, \Psi)_\Xi \quad \forall \Psi \in C_c^\infty(\Xi \cup \Theta), \quad p = j,k, \\ &(w_{j\#}^0, w_{k\#}^0)_\Xi = \delta_{j,k}, \quad j,k = 1,2, \end{aligned}$$

невозможные ввиду простоты первого собственного числа M_1. Обнаруженное противоречие означает выполнение неравенства (5.9). Теорема 5.2 доказана. □

Все подготовлено для завершения рассуждений из конца п. 1 §5. Именно, на основании теоремы 5.2, соотношения (5.9) и связи (3.15) спектральных параметров заключаем, что при некотором, вообще говоря, малом $h > 0$ сегмент

$$[\varepsilon^2(M_1^{-1} - h), \varepsilon^2(M_1^{-1} + h)]$$

содержит единственное собственное число $\tau_{1\#}^\varepsilon$ оператора $\mathcal{A}_\#^\varepsilon$. Таким образом, соотношения (3.17) из второй части леммы 3.1, в которых положим $\delta^\varepsilon = c_1 \varepsilon^{-3} e^{-\frac{\kappa_{1\#}}{3\varepsilon}}$ и $\delta_*^\varepsilon = h\varepsilon^2$, доставляют оценку соболевской нормы разности собственной функции $u_{1\#}^\varepsilon$ и приближения к ней $U_\#^\varepsilon$ из формулы (5.1). Наконец, вспомнив о чётных и нечётных продолжениях собственной функции в четвертушке $\Omega_\#^\varepsilon$ на всю область Ω^ε (таковых всего четыре), формулируем полученный результат.

Теорема 5.3. *Для первых четырёх собственных функций задачи (1.1)–(1.3) в многограннике (1.23) справедливы асимптотические формулы*

$$\varepsilon\Big\|\nabla_x u_k^\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sum_{\alpha,\vartheta=\pm} C^k_{\alpha\vartheta}\chi_{\alpha\vartheta}\nabla_x V_1; L^2(\Omega^\varepsilon)\Big\| + \Big\|u_k^\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sum_{\alpha,\vartheta=\pm} C^k_{\alpha\vartheta}\chi_{\alpha\vartheta}V_1; L^2(\Omega^\varepsilon)\Big\| \leqslant C_0\varepsilon^{-4}e^{-\frac{\kappa}{3\varepsilon}} \quad \text{при} \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Здесь $\chi_{\alpha\vartheta}(y) = \chi(|y-P^{\alpha\vartheta}|)$ — срезающие функции, $P^{\alpha\vartheta}$ — вершины (1.24) квадрата $\mathbb{Q}_1$, $V_1 \in H^1_0(\Xi;\Upsilon)$ — первая собственная функция задачи (2.13) в четверти слоя (1.20), зависящая от систем растянутых декартовых координат $\xi^{\alpha\vartheta} = \varepsilon^{-1}(y-P^{\alpha\vartheta}, z)$, повернутых надлежащим образом (см. формулу (2.12) в случае $\alpha=\vartheta=-1$). Кроме того, $C^1_{\alpha\vartheta}=1$, а остальные столбцы коэффициентов $C^k = \big(C^k_{++}, C^k_{-+}, C^k_{+-}, C^k_{--}\big)$ берутся из списка

$$(1,-1,-1,1), \quad (-1,1,-1,1), \quad (-1,-1,1,1).$$

5.3. Другие асимптотические серии собственных чисел. Теоремы 5.2 и 5.3 не предоставляют полную информацию об асимптотике спектра задачи (1.1)–(1.3) в многограннике (1.23). На первый взгляд кажется, что асимптотические процедуры из предыдущих параграфов позволяют обнаружить серии собственных чисел с иными устойчивыми асимптотиками. В самом деле, при помощи выкладок и рассуждений из п. 3 §3 можно проверить следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Для любых $p,q\in\mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины $c_{(p,q)}$ и $\varepsilon_{(p,q)}$, а также номер $n_{(p,q)}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для собственного числа задачи (1.1)–(1.3) в многограннике (1.23) выполнено соотношение*

$$\big|\lambda^\varepsilon_{n_{(p,q)}(\varepsilon)} - \varepsilon^{-2}\pi^2 - \mu_{(p,q)}\big| \leqslant c_{(p,q)}\varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_{(p,q)}]. \tag{5.13}$$

Здесь $\mu_{(p,q)} = \pi^2\big(p^2+q^2\big)/4$ собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа в квадрате $\square_1$.

Подчеркнём, что условия Дирихле на границе $\partial\square_1$ вызваны наклоном всех четырёх боковых граней и отсутствием порогового резонанса в задаче (2.1)–$(2.3)_N$ (ср. п. 5, §4). Вместе с тем, как и в теореме 4.3, собственные числа в формуле (5.13), имея «большие» номера $n_{(p,q)}(\varepsilon)$, относятся к среднечастотному диапазону спектра.

Можно попытаться получить формальные асимптотические представления собственных чисел λ_5^ε, λ_6^ε, λ_7^ε, ... при помощи асимптотической процедуры из п. 1 §4. Обыкновенные дифференциальные уравнения на четырёх отрезках $(-1,1)$ выводятся по прежней схеме, но обоснованно назначить краевые условия или условия сопряжения в точках $\mathcal{P}^{\pm\vartheta}$, $\vartheta=\pm$ в этой статье не удаётся потому, что автор не знает реализуется или нет пороговый резонанс в задаче (2.13) на четверти слоя (1.20). Если он отсутствует, то упомянутые уравнения снабжаются условиями Дирихле при $y_k=\pm1$, однако возникновение резонанса может породить, например, классические условия сопряжения Кирхгофа в вершинах (1.24) (ср., например, [41]), которые (условия) связывают дифференциальные уравнения на сторонах (3.33) квадрата $\square_1$ в единую спектральную задачу.

Следует особо подчеркнуть, что для задачи (2.13) при $M=\Lambda_1$ в четверти слоя (1.20) со скошенными боковыми сторонами само понятие порогового резонанса требует уточнения, так как неизвестно асимптотическое поведение на бесконечности её решения: метод Фурье не работает по понятной причине, а известные результаты о поведении решений в слоевидных областях (см., например, [48] и др.) относятся в основном к задаче Неймана и не обслуживают возникшую в данной работе специфическую смешанную краевую задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.А. Назаров. *Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках* // Сиб. мат. ж. **54**: 3, 655–672 (2013).
2. L. Friedlander, M. Solomyak. *On the spectrum of narrow periodic waveguides* // Russ. J. Math. Phys. **15**:2, 238–242 (2008).
3. L. Friedlander, M. Solomyak. *On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip* // Isr. J. Math. **170**, 337–354 (2009).
4. D. Borisov, P. Freitas. *Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains* // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linèaire **26**:2, 547–560 (2009).
5. D. Borisov, P. Freitas. *Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in* $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. **258**:3, 893–912 (2010).
6. S.A. Nazarov, E. Perez, J. Taskinen. *Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin nonsmooth domains* // Trans. Am. Math. Soc. **368**:7, 4787–4829 (2016).
7. С.А. Назаров. *Дискретный спектр коленчатых, разветвляющихся и периодических волноводов* // Алгебра Анал. **23**:2, 206–247 (2011).
8. S.A. Nazarov, A.V. Shanin. *Trapped modes in angular joints of 2D waveguides* // Appl. Anal. **93**:3, 572–582 (2014).
9. M. Dauge, N. Raymond. *Plane waveguides with corners in the small angle limit* // J. Math. Phys. **53**:12, 123529 (2012).
10. M. Dauge, Y. Lafranche, T. Ourmières-Bonafos. *Dirichlet spectrum of the Fichera layer* // Integral Equations Oper. Theory **90**:5, 60 (2018).
11. F.L. Bakharev, A.I. Nazarov. *Existence of the discrete spectrum in the Fichera layers and crosses of arbitrary dimension* // J. Funct. Anal. **281**:4, 109071 (2021).
12. С.А. Назаров. *Лакуны в спектре тонкостенного прямоугольного бесконечного короба Дирихле с периодическим семейством перегородок* // Мат. сб. **214**:7, 91–133 (2023).
13. P. Exner, H. Kovarîk. *Quantum waveguides.* Cham: Springer. 2015.
14. О.А. Ладыженская. *Краевые задачи математической физики* М.: Наука. 1973.
15. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир. 1971.
16. И.В. Камоцкий, С.А. Назаров. *О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области* // Проблемы матем. анализа **19**, 105–148 (1999).
17. G. Cardone, T. Durante, S.A. Nazarov. *The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends* // SIAM J. Math. Anal. **42**:6, 2581–2609 (2010).
18. A. Delitsyn, D.S. Grebenkov. *Mode matching methods for spectral and scattering problems* // Q. J. Mech. Appl. Math. **71**:4, 537–580 (2018).
19. D.S. Grebenkov, B.T. Nguyen. *Geometrical structure of laplacian eigenfunctions* // SIAM Rev. **55**:4, 601–667 (2013).
20. С.А. Назаров. *Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок* // Диффер. уравн. **58**:12, 1666–1682 (2022).
21. Г. Фикера. *Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности* // Усп. мат. наук **30**:3(183), 105–124 (1975).
22. W.G. Mazja, S. Nazarov, B. Plamenevskij. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten I. Störungen isolierter Randsingularitäten.* Akademie–Verlag, Berlin (1991).
23. V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.B. Movchan. *Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multistructure* // Asymptotic Anal. **8**:2, 105–143 (1994).
24. V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.B. Movchan. *Asymptotic analysis of fields in multi-structures.* Oxford: Clarendon Press. 1999.
25. С.А. Назаров. *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки.* Новосибирск: Научная книга. 2002.

26. F. Rellich. *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten* // Jahresber. Dtsch. Math.–Ver. **53**, 57–65 (1943).
27. P. Exner, P. Šeba, P. Štóviček. *On existence of a bound state in an L-shaped waveguide* // Czech. J. Phys. **39**, 1181–1191 (1989).
28. S.A. Nazarov, B.A. Plamenevsky. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994.
29. A. Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators.* Basel: Birkhäuser. 2006.
30. М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л.: изд-во Ленингр. ун–та. 1980.
31. С.А. Назаров. *Асимптотика собственных значений задачи Дирихле на скошенном $\mathcal{T}$-образном волноводе* // Ж. вычисл. мат. мат. физ. **54**:5, 793–814 (2014).
32. Ф.Л. Бахарев, С.А. Назаров. *Критерии отсутствия и нличия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов* // Алгебра анал. **32**:6, 1–23 (2020).
33. D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin. *Homogenization of Reticulated Structures.* Springer, Berlin (1999).
34. P.G. Ciarle. *Mathematical Elasticity. Vol 2: Theory of Plates.* North Holland, Amsterdam (1997).
35. J. Sanchez Hubert, E. Sanchez Palencia. *Vibrations and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods.* Berlin: Springer-Verlag. 1989.
36. G. Panasenko. *Multi–scale modelling for structures and composites.* Dordrecht: Springer. 2005.
37. T. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
38. L. Bers, F. John, M. Schehter. *Partial differential equations.* New York: Interscience. 1964.
39. S. Molchanov, B. Vainberg. *Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics* // Commun. Math. Phys. **273**:2, 533–559 (2007).
40. С.А. Назаров. *Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов* // Изв. росс. акад. наук, сер. мат. **84**:6, 73–130 (2020).
41. D. Grieser. *Spectra of graph neighborhoods and scattering* // Proc. Lond. Math. Soc. (3) **97**:3, 718–752 (2008).
42. K. Pankrashkin. *Eigenvalue inequalities and absence of threshold resomamnces for waveguide junctions* // J. Math. Anal. Appl. **449**:1, 907–925 (2017).
43. В.А. Кондратьев. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Труды Московск. матем. общества. **16**: 219–292 (1967).
44. V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, J. Rossman. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1997).
45. М.И. Вишик, Л.А. Люстерник. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Усп. мат. наук **12**:5, 3–122 (1953).
46. М.Д. Ван Дайк. *Методы возмущений в механике жидкостей.* М.: Мир. 1967.
47. А.М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989.
48. С.А. Назаров. *Асимптотика решения краевой задачи в тонком цилиндре с негладкой боковой поверхностью* // Изв. росс. акад. наук, сер. мат. **57**:1, 202–239 (1993).

Сергей Александрович Назаров,
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О., д. 61
199178, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk