ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 111-124.

УДК 517.982.3

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

И.Х. МУСИН, М.И. МУСИН

Аннотация. Рассматривается пространство целых функций нескольких комплексных переменных, быстро убывающих в $\mathbb{R}^n$ и таких, что их рост вдоль $i\mathbb{R}^n$ контролируется при помощи некоторого семейства весовых функций. При некоторых предположениях на весовые функции получено эквивалентное описание этого пространства в терминах оценок на частные производные функций в $\mathbb{R}^n$ и доказана теорема типа Пэли-Винера.

Ключевые слова: пространства Гельфанда-Шилова, преобразование Фурье, целые функции, выпуклые функции.

Mathematics Subject Classification: 32A15, 42B10, 46E10, 46F05, 42A38

1. Введение

1.1. О проблеме. Пусть $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство непрерывных неубывающих функций $\varphi_m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

i_1). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi_m(x)}{x} = +\infty$;

i_2). для любого $A > 0$ существует постоянная $C(m, A) > 0$ такая, что

$$\varphi_m(x) + A\ln(1 + x) \le \varphi_{m+1}(x) + C(m, A), \ x \ge 0.$$

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$ с обычной топологией. Для $u \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ обозначим через $\|u\|$ его евклидову норму.

Для произвольных $\nu \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ введём нормированное пространство

$$E_k(\varphi_\nu) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : p_{\nu,k}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1 + \|z\|)^k}{e^{\varphi_\nu(\|Im\ z\|)}} < \infty\}.$$

Пусть $E(\varphi_\nu)$ – проективный предел пространств $E_k(\varphi_\nu)$, $E(\Phi)$ – индуктивный предел пространств $E(\varphi_\nu)$.

Отметим, что если функции φ_ν определить по формуле $\varphi_\nu(x) = \Omega(\nu x)$ ($\nu \in \mathbb{N}$), где Ω – вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция на $[0, \infty)$ такая, что $\Omega(0) = \Omega'(0) = 0$, Ω' возрастает и $\lim\limits_{x\to+\infty} \Omega'(x) = +\infty$ (таким образом, в этом случае весовые функции $\varphi_\nu(\|x\|)$ – выпуклые в $\mathbb{R}^n$), то $E(\Phi)$ совпадает с пространством Гельфанда-Шилова W^Ω [1] - [5]. В работах [1] - [5] было изучено преобразование Фурье пространства W^Ω и дано альтернативное определение W^Ω. Отметим, что в работе [6] при изучении подобных вопросов в близком (по существу дела) к пространству W^Ω пространстве целых функций, быстро убывающих на вещественной оси, от требования выпуклости весовых функций удалось избавиться.

I.Kh. Musin, M.I. Musin, On Fourier transformation of a class of entire functions.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №14-01-00720, 14-01-97037) и Программы ОМН РАН.

Поступила 5 ноября 2014 г.

Цель работы – описать преобразование Фурье пространства $E(\varPhi)$ и охарактеризовать $E(\varPhi)$ в терминах оценок на частные производные функций в $\mathbb{R}^n$ при достаточно общих дополнительных условиях на $\varPhi$, распространяя подходы работы [6] на случай многих переменных.

1.2. Обозначения и определения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ полагаем $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, то: обозначение $\alpha \le \beta$ означает, что $\alpha_j \le \beta_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$; при $\alpha \le \beta$ полагаем $C_\beta^\alpha = \prod\limits_{j=1}^{n} C_{\beta_j}^{\alpha_j}$.

$s_n(1)$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Для функции $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ полагаем $u[e](x) := u(e^x),\ x \ge 0$.

Для краткости обозначим $\varphi_m[e]$ через ψ_m $(m \in \mathbb{N})$.

$\mathcal{B}$ – множество всех непрерывных функций $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.

Пусть $V = \{h \in \mathcal{B} : h$ выпукла на $[0, \infty)\}$, $\mathcal{V} = \{h \in V : h$ возрастает на $[0, \infty)$ и $h(0) = 0\}$.

Для $g \in V$ пусть $V_g = \{h \in \mathcal{V} : h$ совпадает с g на $[d_h, \infty)$, где d_h – некоторое положительное число, зависящее от $h\}$.

Преобразование Юнга g^* функции $g \in \mathcal{B}$ определяется по формуле: $g^*(x) = \sup\limits_{y \ge 0}(xy - g(y)),\ x \ge 0$.

1.3. Основные результаты. Пусть $\Psi^* = \{\psi_\nu^*\}_{\nu=1}^\infty$. Для $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathcal{E}_m(\psi_\nu^*) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \mathcal{R}_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha! e^{-\psi_\nu^*(|\alpha|)}} < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{E}(\psi_\nu^*) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m(\psi_\nu^*)$, $\mathcal{E}(\Psi^*) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{E}(\psi_\nu^*)$.

Теоремы 1 и 2 (доказанные в разделе 3 по стандартным схемам) нацелены на описание функций из $E(\varPhi)$ в терминах оценок на частные производные в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть семейство $\varPhi$ удовлетворяет условию i_3): для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $a_m > 0$ такая, что*

$$\varphi_m(2x) \le \varphi_{m+1}(x) + a_m,\ x \ge 0.$$

Тогда если $f \in E(\varPhi)$, то $f_{|\mathbb{R}^n} \in \mathcal{E}(\Psi^*)$.

Теорема 2. *Пусть семейство $\varPhi$ удовлетворяет условию i_3'): для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют постоянные $\sigma_m > 1$ и $\gamma_m > 0$ такие, что*

$$\varphi_m(\sigma_m x) \le \varphi_{m+1}(x) + \gamma_m,\ x \ge 0.$$

Тогда любая функция $f \in \mathcal{E}(\Psi^*)$ допускает единственное продолжение до целой функции, принадлежащей $E(\varPhi)$.

Доказательства Теорем 1 и 2 дают дополнительную информацию о структуре $E(\varPhi)$. А именно, для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$ – проективный предел пространств

$$\mathcal{H}_k(\varphi_\nu) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \mathcal{N}_{\nu,k}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1 + \|z\|)^k}{e^{(\psi_\nu^*)^*(\ln(1+\|Imz\|))}} < \infty\},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $\mathcal{H}(\varPhi)$ – индуктивный предел пространств $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$. В разделе 3 показано, что если семейство $\varPhi$ удовлетворяет условию i_3), то $E(\varPhi) = \mathcal{H}(\varPhi)$ (см. Предложение 1).

Переходя к задачам, связанным с преобразованием Фурье в $E(\Phi)$, определим ещё один класс бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Пусть $U = \{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – произвольное семейство неубывающих выпуклых функций u_ν на $[0, \infty)$ таких, что для любого $\nu \in \mathbb{N}$:

i_1). $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u_\nu(x)}{x} = +\infty$;

i_2). $\lim\limits_{x \to +\infty} (u_\nu(x) - u_{\nu+1}(x)) = +\infty$.

Для $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$G_m(u_\nu) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{m,u_\nu} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha| \le m, \beta \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{|x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{|\beta|! e^{-u_\nu(|\beta|)}} < \infty\}.$$

Пусть $G(u_\nu) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} G_m(u_\nu)$, $G(U) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} G(u_\nu)$. Наделим $G(u_\nu)$ топологией, определяемой семейством норм $\|\cdot\|_{m,u_\nu}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$), а $G(U)$ – топологией индуктивного предела пространств $G(u_\nu)$.

Определим преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in E(\Phi)$ по формуле

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, d\xi, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

В разделе 4 доказана

Теорема 3. *Пусть Φ удовлетворяет условию i_3) Теоремы 1 и условию i_4): для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют постоянные $h_m > 1$ и $l_m > 0$ такие, что*

$$2\varphi_m(x) \le \varphi_{m+1}(h_m x) + l_m, \; x \ge 0.$$

Тогда преобразование Фурье $\mathcal{F} : f \in E(\Phi) \to \hat{f}$ устанавливает изоморфизм пространств $E(\Phi)$ и $G(\Psi^*)$.

Далее, пусть $\Phi^* = \{\varphi_\nu^*\}_{\nu=1}^\infty$. Для $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$GS_m(\varphi_\nu^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_{m,\nu}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \le m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{e^{-\varphi_\nu^*(\|x\|)}} < \infty\}.$$

Для $\nu \in \mathbb{N}$ пусть $GS(\varphi_\nu^*) = \bigcap\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} GS_m(\varphi_\nu^*)$. Пусть $GS(\Phi^*) = \bigcup\limits_{\nu \in \mathbb{N}} GS(\varphi_\nu^*)$. Наделим $GS(\varphi_\nu^*)$ топологией, определяемой системой норм $q_{\nu,m}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$), $GS(\Phi^*)$ – топологией индуктивного предела пространств $GS(\varphi_\nu^*)$.

В пятом разделе доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть семейство Φ состоит из выпуклых функций и удовлетворяет условию i_3) Теоремы 1. Тогда $G(\Psi^*) = GS(\Phi^*)$.*

2. Вспомогательные результаты

При доказательстве теорем нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathcal{B}$. Тогда для любого $M > 0$ существует постоянная $A_M > 0$ такая, что для всех $x > 0$*

$$(g[e])^*(x) \le x \ln \frac{x}{M} - x + A_M.$$

Лемма 1 доказана в [6].

Следствие 1. *Пусть $g \in \mathcal{B}$. Тогда для любого $b > 0$ ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \dfrac{e^{(g[e])^*(|\alpha|)}}{b^{|\alpha|} |\alpha|!}$ сходится.*

По той же схеме, что и Лемма 2 в [6], доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $u, v \in \mathcal{B}$ и существуют числа $\tau > 0$ и $C > 0$ такие, что*

$$2u(x) \le v(x+\tau) + C, \ x \ge 0.$$

Тогда найдётся число $A > 0$ такое, что

$$v^*(x+y) \le u^*(x) + u^*(y) + \tau(x+y) + A, \ x, y \ge 0.$$

Лемма 3. *Пусть вещественнозначные функции $u, v \in C[0, \infty)$ таковы, что:*
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u[e](x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{v[e](x)}{x} = +\infty$;
2. существуют числа $\sigma > 1$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$u(\sigma x) \le v(x) + \gamma, \ x \ge 0.$$

Тогда

$$(u[e])^*(x) - (v[e])^*(x) \ge x \ln \sigma - \gamma, \ x \ge 0.$$

Доказательство. Очевидно, $u[e](t + \ln \sigma) \le v[e](t) + \gamma, \ t \ge 0$. Тогда для $x \ge 0$

$$(u[e])^*(x) - (v[e])^*(x) = \sup_{t\ge0}(xt - u[e](t)) - \sup_{t\ge0}(xt - v[e](t)) \ge$$

$$\ge \sup_{t\ge0}(xt - u[e](t)) - \sup_{t\ge0}(xt - u[e](t + \ln \sigma)) - \gamma =$$

$$= \sup_{t\ge0}(xt - u[e](t)) - \sup_{t\ge0}(x(t + \ln \sigma) - u[e](t + \ln \sigma)) + x \ln \sigma - \gamma \ge x \ln \sigma - \gamma.$$

3. Эквивалентное описание $E(\Phi)$ при дополнительных условиях на Φ

3.1. Доказательство Теоремы 1. Пусть $f \in E(\Phi)$. Тогда $f \in E(\varphi_\nu)$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$ произвольны. Пользуясь интегральной формулой Коши, имеем

$$(1 + \|x\|)^m (D^\alpha f)(x) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{L_R(x)} \cdots \int \frac{f(\zeta)(1 + \|x\|)^m \ d\zeta}{(\zeta_1 - x_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - x_n)^{\alpha_n+1}},$$

где для любого $R > 0$ $\ L_R(x) = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - x_j| = R, j = 1, \dots, n\}$. Отсюда получаем, что

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \int\limits_{L_R(x)} \cdots \int \frac{(1 + \|x - \zeta\|)^m (1 + \|\zeta\|)^m |f(\zeta) \ |d\zeta|}{|\zeta_1 - x_1|^{\alpha_1+1} \cdots |\zeta_n - x_n|^{\alpha_n+1}} \le$$

$$\le \frac{\alpha! p_{\nu,m}(f)(1 + nR)^m e^{\varphi_\nu(nR)}}{R^{|\alpha|}}.$$

Пользуясь условием $i_2)$ на Φ, получаем, что

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le e^{C(\nu,m)} \alpha! p_{\nu,m}(f) \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(nR)}}{R^{|\alpha|}}.$$

Следовательно,

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le e^{C(\nu,m)} n^{|\alpha|} \alpha! p_{\nu,m}(f) \inf_{R>0} \frac{e^{\varphi_{\nu+1}(R)}}{R^{|\alpha|}} \le$$

$$\le e^{C(\nu,m)} n^{|\alpha|} \alpha! p_{\nu,m}(f) \exp(-\sup_{R>1}(|\alpha| \ln R - \varphi_{\nu+1}(R)) =$$

$$= e^{C(\nu,m)} n^{|\alpha|} \alpha! p_{\nu,m}(f) e^{-\sup\limits_{r>0}(|\alpha| r - \psi_{\nu+1}(r))} = e^{C(\nu,m)} n^{|\alpha|} \alpha! p_{\nu,m}(f) e^{-\psi^*_{\nu+1}(|\alpha|)}.$$

Поскольку в силу условия $i_3)$ и Леммы 3 для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\psi_k^*(x) - \psi_{k+1}^*(x) \ge x \ln 2 - a_k, \ x \ge 0, \tag{1}$$

то, пользуясь неравенством (1), получаем, что

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le a_{\nu,m} p_{\nu,m}(f) \alpha! e^{-\psi^*_{\nu+n}(|\alpha|)}, \ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,$$

где $a_{\nu,m}$ – некоторое положительное число, зависящее от ν и m. Следовательно, для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{R}_{m,\nu+n}(f_{|\mathbb{R}^n}) \le a_{\nu,m} p_{\nu,m}(f). \tag{2}$$

Значит, $f_{|\mathbb{R}^n} \in \mathcal{E}(\psi^*_{\nu+n})$. Таким образом, $f_{|\mathbb{R}^n} \in \mathcal{E}(\Psi^*)$.

3.2. Доказательство Теоремы 2. Пусть $f \in \mathcal{E}(\Psi^*)$. Тогда $f \in \mathcal{E}(\psi^*_\nu)$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Следовательно, для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \mathcal{R}_{m,\nu}(f) \alpha! e^{-\psi^*_\nu(|\alpha|)}, \ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{3}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\psi^*_\nu(x)}{x} = +\infty$, то из неравенства (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $c_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ $|(D^\alpha f)(x)| \le c_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|} \alpha!$. Ясно, что последовательность $(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \frac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!} x^\alpha)_{k=1}^\infty$ сходится к f равномерно на компактах $\mathbb{R}^n$, а ряд $\sum\limits_{|\alpha|\ge 0} \dfrac{(D^\alpha f)(0)}{\alpha!} z^\alpha$ сходится в $H(\mathbb{C}^n)$ и его сумма $F_f(z)$ – целая функция. Отметим, что $F_{f|\mathbb{R}^n} = f$. Единственность голоморфного продолжения очевидна.

Покажем, что $F_f \in E(\Phi)$. Оценим рост F_f пользуясь неравенством (3) и разложением F_f в ряд Тейлора в точке $x \in \mathbb{R}^n$: $F_f(z) = \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} \dfrac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} (iy)^\alpha, \ z = x+iy, \ y \in \mathbb{R}^n$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Тогда

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{(1+\|x\|)^m (1+\|y\|)^{m+|\alpha|} |(D^\alpha f)(x)|}{\alpha!} \le$$

$$\le \sum_{|\alpha|\ge 0} \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{-\psi^*_\nu(|\alpha|)} (1+\|y\|)^{m+|\alpha|} \le$$

$$\le \mathcal{R}_{m,\nu}(f)(1+\|y\|)^m \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{(1+\|y\|)^{|\alpha|}}{e^{\psi^*_{\nu+1}(|\alpha|)}} e^{\psi^*_{\nu+1}(|\alpha|)-\psi^*_\nu(|\alpha|)}.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что по Лемме 3

$$\psi^*_k(x) - \psi^*_{k+1}(x) \ge \delta_k x - \gamma_k, \ x \ge 0, \tag{4}$$

где $\delta_k = \ln \sigma_k$, и обозначив $(\frac{e^{\gamma_\nu+\delta_\nu}}{e^{\delta_\nu}-1})^n$ через B_ν, имеем

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le B_\nu \mathcal{R}_{m,\nu}(f)(1+\|y\|)^m e^{\sup\limits_{t\ge0}(t\ln(1+\|y\|)-\psi^*_{\nu+1}(t))}.$$

Таким образом,

$$(1+\|z\|)^m |F_f(z)| \le B_\nu \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{(\psi^*_{\nu+1})^*(\ln(1+\|y\|))+m\ln(1+\|y\|)}. \tag{5}$$

Отметим, что из условия i_2) следует, что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $A > 0$

$$\psi_k(x) + Ax \le \psi_{k+1}(x) + C(k,A), \ x \ge 0.$$

Отсюда легко получаем, что для всех $\xi \ge 0$

$$\psi^*_k(\xi) \ge \psi^*_{k+1}(\xi + A) - C(k,A).$$

Тогда для всех $x \ge 0$

$$(\psi^*_k)^*(x) = \sup_{\xi\ge0}(x\xi - \psi^*_k(\xi)) \le \sup_{\xi\ge0}(x\xi - \psi^*_{k+1}(\xi+A)) + C(k,A) =$$

$$= \sup_{\xi \geq 0} (x(\xi + A) - \psi^*_{k+1}(\xi + A)) - Ax + C(k, A) \leq (\psi^*_{k+1})^*(x) - Ax + C(k, A).$$

Таким образом, для всех $k \in \mathbb{N}$ и $A > 0$ имеем

$$(\psi^*_k)^*(x) + Ax \leq (\psi^*_{k+1})^*(x) + C(k, A), \ x \geq 0. \tag{6}$$

Теперь пользуясь неравенством (6), получим из оценки (5), что

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq B_\nu \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{C_{\nu+1,m}} e^{(\psi^*_{\nu+2})^*(\ln(1+\|y\|))}. \tag{7}$$

Ясно, что

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq B_\nu \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{C_{\nu+1,m}} e^{\psi_{\nu+2}(\ln(1+\|y\|))}.$$

Это означает, что

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq B_\nu \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{C_{\nu+1,m}} e^{\varphi_{\nu+2}(1+\|y\|)}.$$

Пользуясь неубыванием функций семейства Φ и условием i'_3), найдём постоянную $K_{\nu,m} > 0$ такую, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$(1 + \|z\|)^m |F_f(z)| \leq K_{\nu,m} \mathcal{R}_{m,\nu}(f) e^{\varphi_{\nu+3}(\|Imz\|)}. \tag{8}$$

Таким образом, для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ $p_{\nu+3,m}(F_f) \leq K_{\nu,m} \mathcal{R}_{m,\nu}(f)$. Следовательно, $F_f \in E(\varphi_{\nu+3})$. Значит, $F_f \in E(\Phi)$. Тем самым Теорема 2 доказана.

3.3. Замечание о пространстве $E(\Phi)$. Напомним, что в первом разделе были введены пространства $\mathcal{H}_k(\varphi_\nu)$, $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$ и $\mathcal{H}(\Phi)$ следующим образом. Для произвольных $\nu \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\mathcal{H}_k(\varphi_\nu) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \mathcal{N}_{\nu,k}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1 + \|z\|)^k}{e^{(\psi^*_\nu)^*(\ln(1+\|Imz\|))}} < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{H}(\varphi_\nu) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\varphi_\nu)$, $\mathcal{H}(\Phi) = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{H}(\varphi_\nu)$. Поскольку для $f \in \mathcal{H}_{k+1}(\varphi_\nu)$ имеем, что $\mathcal{N}_{\nu,k}(f) \leq \mathcal{N}_{\nu,k+1}(f)$, то $\mathcal{H}_{k+1}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{H}_k(\varphi_\nu)$. Наделим $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$ топологией, определяемой семейством норм $\mathcal{H}_k(\varphi_\nu)$. Принимая во внимание неравенство (6), видим, что если $f \in \mathcal{H}(\varphi_\nu)$, то $\mathcal{N}_{\nu+1,k}(f) \leq e^{C(\nu,1)} \mathcal{N}_{\nu,k}(f)$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$ непрерывно вложено в $\mathcal{H}(\varphi_{\nu+1})$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$. Снабдим $\mathcal{H}(\Phi)$ топологией индуктивного предела пространств $\mathcal{H}(\varphi_\nu)$.

Предложение 1. *Пусть семейство Φ удовлетворяет условию i_3). Тогда $E(\Phi) = \mathcal{H}(\Phi)$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\mathcal{H}(\Phi)$ непрерывно вложено в $E(\Phi)$. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{H}(\varphi_\nu)$. Пользуясь неубыванием φ_ν и условием i_3) на Φ, найдём постоянную $K_\nu > 0$ такую, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$p_{\nu+1,k}(f) \leq K_\nu \mathcal{N}_{\nu,k}(f), \ f \in \mathcal{H}(\varphi_\nu).$$

Отсюда следует, что $f \in E(\Phi)$, и вложение $I : \mathcal{H}(\Phi) \to E(\Phi)$ непрерывно.

Покажем, что отображение I сюръективно. Пусть $f \in E(\Phi)$. Тогда $f \in E(\varphi_\nu)$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ произвольно. Напомним, что по неравенству (2) $\mathcal{R}_{m,\nu+n}(f_{|\mathbb{R}}) \leq a_{\nu,m} p_{\nu,m}(f)$. Отсюда и из неравенства (7) (с ν заменённым на $\nu + n$; также напомним, что в нашем случае $\sigma = 2$ для любого $m \in \mathbb{N}$) получим, что

$$\mathcal{N}_{\nu+n+2,m}(f) \leq A_{\nu,m} p_{\nu,m}(f),$$

где $A_{\nu,m} > 0$ – некоторая постоянная. Значит, $f \in \mathcal{H}(\varphi_{\nu+n+2})$. Следовательно, $f \in \mathcal{H}(\Phi)$. Кроме того, последняя оценка показывает, что обратное отображение I^{-1} непрерывно. Таким образом, $E(\Phi) = \mathcal{H}(\Phi)$.

4. Преобразование Фурье в $E(\varPhi)$

4.1. **Более простое описание пространства** $G(\Psi^*)$. Покажем, что если $\varPhi$ удовлетворяет условию i_3), то пространство $G(\Psi^*)$ допускает более простое описание. Для этого введём пространство $Q(\Psi^*)$ следующим образом. Для $\nu \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$Q_m(\psi_\nu^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : N_{\nu,m}(f) = \max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_\nu^*(k)}} < \infty\}.$$

Пусть $Q(\psi_\nu^*) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} Q_m(\psi_\nu^*)$, $Q(\Psi^*) = \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} Q(\psi_\nu^*)$. С помощью семейства норм $N_{\nu,m}(f)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$) определим локально выпуклую топологию в $Q(\psi_\nu^*)$. Наделим $Q(\Psi^*)$ топологией индуктивного предела пространств $Q(\psi_\nu^*)$.

Лемма 4. *Пусть семейство $\varPhi$ удовлетворяет условию i_3). Тогда $Q(\Psi^*) = G(\Psi^*)$.*

Доказательство. Очевидно, если $\nu \in \mathbb{N}$ и $f \in Q(\psi_\nu^*)$, то для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем $\|f\|_{m,\psi_\nu^*} \le N_{\nu,m}(f)$. Следовательно, $f \in G_m(\psi_\nu^*)$. Итак, если $f \in Q(\Psi^*)$, то $f \in G(\Psi^*)$ и отображение вложения $J : Q(\Psi^*) \to G(\Psi^*)$ непрерывно.

Покажем, что J сюръективно. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in G(\psi_\nu^*)$. Пользуясь неравенством (1), имеем

$$\sup_{\|x\|\le 1, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}} \le \sup_{\|x\|\le 1, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{e^{a_{\nu+n-1}} |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n-1}^*(k)}}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{e^{\psi_{\nu+n-1}^*(k)}}{k!} = 0$, то при некотором $C_1(\nu) > 1$

$$\sup_{\|x\|\le 1, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}} \le C_1(\nu) \sup_{\|x\|\le 1} |(D^\alpha f)(x)|, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{9}$$

Так как для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$

$$|(D^\alpha f)(x)| \le \|f\|_{m,\psi_\nu^*} e^{-\psi_\nu^*(0)}, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

то из неравенства (9) получим, что

$$\max_{|\alpha|\le m} \sup_{\|x\|\le 1, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}} \le C_1(\nu) \|f\|_{m,\psi_\nu^*} e^{-\psi_\nu^*(0)}. \tag{10}$$

Далее, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\sup_{\|x\|>1, k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}} \le \sup_{\|x\|>1, \beta\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{(2n)^{|\beta|} |x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{|\beta|! e^{-\psi_{\nu+n}^*(|\beta|)}}.$$

Пользуясь неравенством (1), имеем при некотором $C_2(\nu) > 1$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \le m$

$$\sup_{\substack{\|x\|>1,\\ k\in\mathbb{Z}_+}} \frac{(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)|}{k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}} \le \sup_{\substack{\|x\|>1,\\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n}} \frac{C_2(\nu) |x^\beta (D^\alpha f)(x)|}{|\beta|! e^{-\psi_\nu^*(|\beta|)}} \le C_2(\nu) \|f\|_{m,\psi_\nu^*}.$$

Отсюда и из (10) получим, что для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$N_{\nu+n,m}(f) \le C(\nu) \|f\|_{m,\psi_\nu^*}, \ f \in G(\psi_\nu^*), \tag{11}$$

где $C(\nu) = \max(C_1(\nu) e^{-\psi_\nu^*(0)}, C_2(\nu))$. Следовательно, $f \in Q(\psi_{\nu+n}^*)$. Таким образом, если $f \in G(\Psi^*)$, то $f \in Q(\Psi^*)$. Отметим, что из (11) легко следует, что обратное отображение J^{-1} непрерывно. Таким образом, окончательно имеем: $Q(\psi^*) = G(\psi^*)$.

4.2. **Доказательство Теоремы 3**. Покажем вначале, что линейное отображение $\mathcal{F} : f \in E(\Phi) \to \hat{f}$ действует из $E(\Phi)$ в $G(\Psi^*)$ и является непрерывным. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ и $f \in E(\varphi_\nu)$. Пользуясь равенством

$$x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x) = x^\beta \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)(-i\zeta)^\alpha e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\, d\xi,\ \zeta = \xi + i\eta,$$

справедливом при всех $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x, \eta \in \mathbb{R}^n$, получим, что

$$|x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\zeta)|(1+\|\zeta\|)^{n+|\alpha|+1} e^{\langle x,\eta\rangle} \|x\|^{|\beta|}}{(1+\|\xi\|)^{n+1}}\, d\xi. \tag{12}$$

Если $|\beta| = 0$, то из неравенства (12) имеем (при $\eta = 0$)

$$|(D^\alpha \hat{f})(x)| \le s_n(1) e^{\varphi_\nu(0)} p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f). \tag{13}$$

Если $|\beta| > 0$, $x \ne 0$, то, полагая $\eta = -\frac{xt}{\|x\|}$ с $t > 0$, получим из (12), что

$$|x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x)| \le s_n(1) p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f) e^{-t\|x\|} e^{\varphi_\nu(t)} \|x\|^{|\beta|} \le$$

$$\le s_n(1) p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f) e^{\sup\limits_{r>0}(-tr+|\beta|\ln r)} e^{\varphi_\nu(t)} = s_n(1) p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f) e^{|\beta|\ln|\beta| - |\beta| - |\beta|\ln t} e^{\varphi_\nu(t)}.$$

Так как для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\inf_{t>0}(-k\ln t + \varphi_\nu(t)) = -\sup_{t>0}(k\ln t - \varphi_\nu(t)) \le$$

$$\le -\sup_{t\ge 1}(k\ln t - \varphi_\nu(t)) = -\sup_{u\ge 0}(ku - \psi_\nu(u)) = -\psi_\nu^*(k),$$

то отсюда и из предыдущей оценки получим, что

$$|x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x)| \le s_n(1) p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f) e^{|\beta|\ln|\beta| - |\beta|} e^{-\psi_\nu^*(|\beta|)}. \tag{14}$$

Если $|\beta| > 0$ и $x = 0$, то $x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x) = 0$. Отсюда и из неравенств (13) и (14) следует, что для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x)| \le s_n(1) p_{\nu,n+|\alpha|+1}(f) |\beta|! e^{-\psi_\nu^*(|\beta|)}.$$

Таким образом, для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\max_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|x^\beta (D^\alpha \hat{f})(x)|}{|\beta|! e^{-\psi_\nu^*(|\beta|)}} \le s_n(1) p_{\nu,n+m+1}(f),\ f \in E(\varphi_\nu).$$

Другими словами, $\|\hat{f}\|_{m,\psi_\nu^*} \le s_n(1) p_{\nu,n+m+1}(f),\ f \in E(\varphi_\nu)$. Это означает, что отображение $\mathcal{F}$ действует из $E(\Phi)$ в $G(\Psi^*)$ и является непрерывным.

Покажем, что $\mathcal{F}$ сюръективно. Пусть $g \in G(\Psi^*)$. Тогда $g \in G(\psi_\nu^*)$ при некотором $\nu \in \mathbb{N}$. Согласно доказательству Леммы 4 $g \in Q(\psi_{\nu+n}^*)$. Тогда

$$(1+\|x\|)^k |(D^\alpha g)(x)| \le N_{\nu+n,|\alpha|}(g) k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)},\ k \in \mathbb{Z}_+, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Пусть

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \xi \in \mathbb{R}^n$. Положим $\gamma_s = \min(\alpha_s, \beta_s)$ для $s = 1, \ldots, n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Пользуясь равенством

$$(i\xi)^\beta (D^\alpha f)(\xi) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j (D^{\beta-j} g)(x) (D^j (ix)^\alpha) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, dx$$

и неравенством (15), оценим $\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)$ по модулю. Имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j \int_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta-j}g)(x)| \frac{\alpha!}{(\alpha-j)!} \|x\|^{|\alpha-j|}\, dx \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j \frac{\alpha!}{(\alpha-j)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^{\beta-j}g)(x)|(1+\|x\|)^{|\alpha-j|+n+1} \frac{dx}{(1+\|x\|)^{n+1}} \le$$

$$\le \frac{s_n(1)}{(2\pi)^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j \frac{\alpha!}{(\alpha-j)!} \frac{N_{\nu+n,|\beta|}(g)(|\alpha|-|j|+n+1)!}{e^{\psi^*_{\nu+n}(|\alpha|-|j|+n+1)}} \le$$

$$\le \frac{s_n(1)N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha!}{(2\pi)^n} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j \frac{(|\alpha|-|j|+n+1)!}{(\alpha-j)!} e^{-\psi^*_{\nu+n}(|\alpha|-|j|)} .$$

Отметим, что из условия $i_4)$ на Φ следует, что для любого $k\in\mathbb{N}$

$$2\psi_k(x) \le \psi_{k+1}(x+b_k) + l_k,\ x\ge 0,$$

где $b_k = \ln h_k$. Тогда по Лемме 2 при некотором $A_k>0$

$$\psi^*_{k+1}(x+y) \le \psi^*_k(x) + \psi^*_k(y) + b_k(x+y) + A_k,\ x,y\ge 0. \tag{16}$$

Пользуясь неравенством (16) и полагая $c_1 = \frac{s_n(1)e^{A_{\nu+n}}}{(2\pi)^n}$, имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{c_1 e^{b_{\nu+n}|\alpha|} N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha!}{e^{\psi^*_{\nu+n+1}(|\alpha|)}} \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+^n:\\ j\le\gamma}} \frac{C_\beta^j(|\alpha|-|j|+n+1)! e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}}{(\alpha-j)!}.$$

Отметим, что $(m_1+m_2)! \le e^{m_1+m_2} m_1! m_2!$ для $m_1,m_2\in\mathbb{Z}_+$. Отсюда следует, что

$$(m_1+\cdots+m_n)! \le e^{(n-1)(m_1+\cdots+m_n)} m_1!\cdots m_n!,\ m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Пользуясь этим неравенством и полагая $c_2 = c_1 e^{n+1}(n+1)!$, имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{c_2 e^{b_{\nu+n}|\alpha|} N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha!}{e^{\psi^*_{\nu+n+1}(|\alpha|)}} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j \frac{e^{|\alpha|-|j|}(|\alpha|-|j|)! e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}}{(\alpha-j)!}.$$

Пользуясь снова неравенством (17), имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{c_2 e^{b_{\nu+n}|\alpha|} N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha!}{e^{\psi^*_{\nu+n+1}(|\alpha|)}} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} C_\beta^j e^{n(|\alpha|-|j|)} e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}.$$

Таким образом,

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le \frac{c_2 \beta! e^{(b_{\nu+n}+n)|\alpha|} N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha!}{e^{\psi^*_{\nu+n+1}(|\alpha|)}} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+^n : j\le\gamma} \frac{e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}}{e^{n|j|} j!}.$$

Пользуясь ещё раз неравенством (17) и полагая $c_3 = c_2\beta! \sum\limits_{|j|\ge 0} \frac{e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}}{|j|!}$ (ряд $\sum\limits_{|j|\ge 0} \frac{e^{\psi^*_{\nu+n}(|j|)}}{|j!|}$ сходится (см. Следствие 1)), имеем

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le c_3 e^{(b_{\nu+n}+n)|\alpha|} N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha! e^{-\psi^*_{\nu+n+1}(|\alpha|)}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (1), найдём натуральное число $s=s(\nu,n)>n+1$ и постоянную $c_4>0$ (зависящую от ν, n и β), что

$$|\xi^\beta(D^\alpha f)(\xi)| \le c_4 N_{\nu+n,|\beta|}(g)\alpha! e^{-\psi^*_{\nu+s}(|\alpha|)}.$$

Поэтому, если $m \in \mathbb{Z}_+$, то тогда из последнего неравенства получим, что

$$(1+\|\xi\|)^m|(D^\alpha f)(\xi)| \le c_5 N_{\nu+n,m}(g)\alpha! e^{-\psi^*_{\nu+s}(|\alpha|)},\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $c_5 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ν, n и m. По теореме 2 f голоморфно продолжается до целой функции F_f из $E(\Phi)$. Очевидно, $g = \mathcal{F}(F_f)$. Доказательство Теоремы 2 (см. неравенства (3) и (8)) показывает, что найдётся постоянная $c_6 > 0$ (зависящая от ν, n и m) такая, что для $z \in \mathbb{C}^n$

$$(1+\|z\|)^m|F_f(z)| \le c_6 N_{\nu+n,m}(g) e^{\varphi_{\nu+s+3}(\|Imz\|)}.$$

Следовательно, $p_{\nu+s+3,m}(F_f) \le c_6 N_{\nu+n,m}(g)$. С учётом неравенства (11), получим $p_{\nu+s+3,m}(F_f) \le c_7\|g\|_{m,\psi^*_\nu},\ g \in G(\psi^*_\nu)$, где $c_7 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ν, n и m. Отсюда следует непрерывность обратного отображения $\mathcal{F}^{-1}$.

Таким образом, доказано, что преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $E(\Phi)$ и $G(\Psi^*)$.

4.3. **Об одном подходе к построению семейства** Φ. Пусть $U = \{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ – семейство неубывающих выпуклых функций u_ν на $[0,\infty)$ таких, что для любого ν:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_\nu(x)}{x} = +\infty$;
2. каково бы ни было $M > 0$ существует постоянная $A(M,\nu) > 0$ такая, что
$$u_\nu(x) \le x \ln \frac{x}{M} + A(M,\nu),\ x > 0;$$
3. каково бы ни было $A > 0$ найдётся постоянная $K(\nu, A) > 0$ такая, что
$$u_{\nu+1}(x+A) \le u_\nu(x) + K(\nu, A),\ x \ge 0;$$
4. найдётся постоянная $a_\nu > 0$ такая, что
$$u_\nu(x) - u_{\nu+1}(x) \ge x\ln 2 - a_\nu,\ x \ge 0;$$
5. существует постоянная $A_\nu > 0$ такая, что
$$u_{\nu+1}(2x) \le 2u_\nu(x) + x\ln 4 + A_\nu,\ x \ge 0.$$

Пусть семейство Φ состоит из функций φ_ν, определённых на $[0,\infty)$ по правилу: $\varphi_\nu(x) = u^*_\nu(\ln(1+x)),\ x \ge 0$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Очевидно, что функции φ_ν не убывают и непрерывны на $[0,\infty)$. Из первых двух условий следует, что построенное семейство удовлетворяет условию i_1). Третье условие гарантирует выполнение условия i_2). Из четвёртого условия легко получить, что при любом $\nu \in \mathbb{N}$

$$u^*_\nu(t+\ln 2) - u^*_{\nu+1}(t) \le a_\nu,\ t \ge 0.$$

И тогда при любом $x \ge 0$ имеем

$$\varphi_\nu(2x) = u^*_\nu(\ln(1+2x)) \le u^*_\nu(\ln(2(1+x))) = u^*_\nu(\ln 2 + \ln(x+1)) \le$$

$$\le u^*_{\nu+1}(\ln(x+1)) + a_\nu = \varphi_{\nu+1}(x) + a_\nu.$$

Значит, семейство Φ удовлетворяет условию вида i_3). Условие вида i_4) для Φ также выполняется. При его проверке воспользуемся следующим простым утверждением.

Предложение 2. *Пусть $u, v \in \mathcal{B}$ и существуют числа $\tau > 0$ и $A > 0$ такие, что*

$$v(2x) \le 2u(x) + 2\tau x + A,\ x, y \ge 0.$$

Тогда

$$2u^*(x) \le v^*(x+\tau) + A,\ x \ge 0.$$

Доказательство. Для любого $x \geq 0$ имеем

$$2u^*(x) = \sup_{\xi \geq 0}(2x\xi - 2u(\xi)) \leq \sup_{\xi \geq 0}(2x\xi - v(2\xi) + 2\tau\xi) + A =$$

$$= \sup_{\xi \geq 0}((x+\tau)t - v(t)) + A = v^*(x+\tau) + A.$$

Возвращаясь к проверке условия i_4) для нашего Φ, имеем (пользуясь пятым условием на U и Предложением 2) для любого $\nu \in \mathbb{N}$ и $x \geq 0$, что

$$2\varphi_\nu(x) = 2u_\nu^*(\ln(1+x)) \leq u_{\nu+1}^*(\ln(1+x) + \ln 2) + A_\nu =$$

$$= u_{\nu+1}^*(\ln((2x+1)+1) + A_\nu = \varphi_{\nu+1}(2x+1) + A_\nu.$$

Отсюда следует, что условие i_4) выполняется, причём, в качестве h_ν можно взять любое число больше 2.

Таким образом, рассматриваемое семейство Φ удовлетворяет условиям Теоремы 3. Следовательно, преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $E(\Phi)$ и $G(U)$.

5. Специальный случай семейства Φ

При доказательстве Теоремы 4 будут использоваться следующие три леммы.

Лемма 5. *Пусть $g \in \mathcal{B}$. Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g^*((1+\delta)x) - g^*(x)}{x} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ произвольно. Для $x > 0$ обозначим через $\xi(x)$ точку, в которой достигается супремум функции $u_x(\xi) = x\xi - g(\xi)$ по множеству $[0, \infty)$. Отметим, что $\xi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. В противном случае найдётся число $M > 0$ и последовательность $(x_j)_{j=1}^\infty$ положительных чисел x_j, стремящаяся к $+\infty$, такая, что $\xi(x_j) \leq M$. Тогда $g^*(x_j) = x_j\xi(x_j) - g(\xi(x_j))$. Но это противоречит тому, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g^*(x)}{x} = +\infty$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to +\infty} \xi(x) = +\infty$. Отсюда и из неравенства

$$g^*((1+\delta)x) - g^*(x) \geq (1+\delta)x\xi(x) - g(\xi(x)) - x\xi(x) + g(\xi(x)) = \delta x\xi(x), \ x > 0,$$

утверждение леммы следует.

Следующее утверждение легко следует из результатов С.В. Попёнова (см. Лемму 4 в [9]) и поэтому его доказательство здесь не приводится.

Лемма 6. *Пусть $u \in V$. Тогда найдётся постоянная $K > 0$ (зависящая от u) такая, что*

$$(u[e])^*(t) + (u^*[e])^*(t) \geq t \ln t - t - K, \ t > 0.$$

Следующая лемма доказана в [8].

Лемма 7. *Пусть $u \in \mathcal{B}$. Тогда*

$$(u[e])^*(x) + (u^*[e])^*(x) \leq x \ln x - x, \ x > 0.$$

Доказательство Теоремы 4. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $f \in G(\psi_\nu^*)$. Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}_+$. Так как $f \in Q(\psi_{\nu+n}^*)$ (см. доказательство Леммы 4), то для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq \frac{N_{\nu+n,m}(f) k! e^{-\psi_{\nu+n}^*(k)}}{(1+\|x\|)^k} \ . \tag{18}$$

Учитывая, что $j! < \frac{3j^{j+1}}{e^j}$ для $j \in \mathbb{N}$ и пользуясь неравенством (16) и неубыванием функции $\psi^*_{\nu+n}$, имеем для всех $k \in \mathbb{N}$, $t \in [k, k+1)$ и $\mu \ge 1$

$$\frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le \frac{3k^{k+1} e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{e^k \mu^k} \le \frac{3\mu t^{t+1} e^{-\psi^*_{\nu+n+1}(t)+\psi^*_{\nu+n}(1)+b_{\nu+n}t+A_{\nu+n}}}{e^t \mu^t}.$$

Пользуясь (1), имеем

$$\frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_1 \mu e^{(t+1)\ln t - \psi^*_{\nu+s}(t) - t\ln e\mu + (b_{\nu+n} - s\ln 2)t},$$

где натуральное число $s \ge n+2$, положительная постоянная C_1 зависит от ν, n и s. Теперь выберем $s \in \mathbb{N}$ так, что $s \ln 2 > b_{\nu+n}$. Найдём постоянную $C_2 > 0$ (зависящую от ν, n и выбранного s) такую, что

$$\frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_2 \mu e^{t\ln t - \psi^*_{\nu+s}(t) - t\ln\mu}.$$

Теперь с помощью Леммы 6 получим, что

$$\frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_3 \mu e^{(\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu},$$

где C_3 – некоторая положительная постоянная, зависящая от ν, n и выбранного s. Отсюда следует, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_3 \mu e^{\inf\limits_{t\ge 1} (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu}. \tag{19}$$

Очевидно,

$$\inf_{t\ge 1} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) \le -\ln\mu + (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(1);$$

$$\inf_{0<t\le 1} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) \ge -\ln\mu + (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(0).$$

Следовательно,

$$\inf_{t\ge 1} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) \le$$

$$\le \inf_{0<t\le 1} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) + (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(1) - (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(0).$$

Обозначив $(\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(1) - (\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(0)$ через m_ν, имеем

$$\inf_{t\ge 1} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) \le \inf_{t>0} \big((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\big) + m_\nu.$$

Возвращаясь к (19), имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_3 e^{m_\nu} \mu e^{\inf\limits_{t>0} \left((\varphi^*_{\nu+s}[e])^*(t) - t\ln\mu\right)}. \tag{20}$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем $\theta_j \in V_{\varphi^*_j[e]}$. Тогда

$$|\theta_j(\xi) - \varphi^*_j[e](\xi)| \le r_j, \ \xi \ge 0; \tag{21}$$

$$|\theta^*_j(\xi) - (\varphi^*_j[e])^*(\xi)| \le r_j, \ \xi \ge 0, \tag{22}$$

где r_j – некоторая положительная постоянная, зависящая от $\varphi^*_j[e]$ и θ_j. Из (20) (пользуясь неравенством (22)), имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_4 \mu e^{\inf\limits_{t>0} \left(\theta^*_{\nu+s}(t) - t\ln\mu\right)},$$

где $C_4 = C_3 e^{m_\nu + r_{\nu+s}}$. Пользуясь формулой обращения для преобразования Юнга [10], получим

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_4 \mu e^{-\theta_{\nu+s}(\ln\mu)}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (21), имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_5 \mu e^{-\varphi^*_{\nu+s}[e](\ln\mu)},$$

где $C_5 = C_{\nu,4} e^{r_{\nu+s}}$. То есть,

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{\mu^k} \le C_5 \mu e^{-\varphi^*_{\nu+s}(\mu)}.$$

Пользуясь этим неравенством и неубыванием $\varphi^*_{\nu+s}$, имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{(1+\|x\|)^k} \le C_5 (1+|x|) e^{-\varphi^*_{\nu+s}(\|x\|)},\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{23}$$

Отметим, что, пользуясь условием i_3) на Φ, легко показать, что для любого $j\in\mathbb{N}$

$$\varphi^*_{j+1}(\xi) \le \varphi^*_j\left(\frac{\xi}{2}\right) + a_j,\ \xi\ge 0. \tag{24}$$

Следовательно,

$$\varphi^*_j(\xi) - \varphi^*_{j+1}(\xi) \ge \varphi^*_j(\xi) - \varphi^*_j\left(\frac{\xi}{2}\right) - a_j,\ \xi\ge 0.$$

Отсюда и из Леммы 5 получим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi^*_j(\xi) - \varphi^*_{j+1}(\xi)}{\xi} = +\infty. \tag{25}$$

Возвращаясь к (23), с помощью (25) получим, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k! e^{-\psi^*_{\nu+n}(k)}}{(1+\|x\|)^k} \le C_6 e^{-\varphi^*_{\nu+s+1}(\|x\|)},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

где C_6 – некоторое положительное число. Отсюда и из неравенства (18) получим, что для всех $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$ с $|\alpha|\le m$

$$|(D^\alpha f)(x)| \le C_6 N_{\nu+n,m}(f) e^{-\varphi^*_{\nu+s+1}(\|x\|)}. \tag{26}$$

Это означает, что $q_{m,\nu+s+1}(f) \le C_6 N_{\nu+n,m}(f),\ f\in G(\psi^*_\nu)$. Принимая во внимание неравенство (11), имеем

$$q_{m,\nu+s+1}(f) \le C_7 \|f\|_{m,\psi^*_\nu},\ f\in G(\psi^*_\nu),$$

где C_7 – некоторая положительная постоянная, зависящая от ν. Отсюда следует, что тождественное отображение I действует из $G(\Psi^*)$ в $GS(\Phi^*)$ и является непрерывным.

Покажем, что I сюръективно. Пусть $f\in GS(\Phi^*)$. Тогда $f\in GS(\varphi^*_\nu)$ при некотором $\nu\in\mathbb{N}$. Зафиксируем $m\in\mathbb{Z}_+$. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, причём $|\alpha|\le m$. Тогда

$$|(D^\alpha f)(x)| \le q_{m,\nu}(f) e^{-\varphi^*_\nu(\|x\|)}. \tag{27}$$

Пользуясь неравенством (24), получим из (27), что

$$|(D^\alpha f)(x)| \le e^{a_\nu} q_{m,\nu}(f) e^{-\varphi^*_{\nu+1}(2\|x\|)}.$$

Очевидно, найдётся постоянная $M_\nu > 1$ такая, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) e^{-\varphi^*_{\nu+1}(\|x\|+1)}.$$

Другими словами,

$$|(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) e^{-\varphi^*_{\nu+1}[e](\ln(\|x\|+1))}.$$

Отсюда имеем

$$|(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) e^{-\sup\limits_{t>0}(t\ln(\|x\|+1)-(\varphi^*_{\nu+1}[e])^*(t))}.$$

Теперь, пользуясь Леммой 7, получим

$$|(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) e^{-\sup\limits_{t>0}(t\ln(e(|x|+1))-t\ln t+\psi^*_{\nu+1}(t))}.$$

Следовательно, для любых $k \in \mathbb{N}$

$$|(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) \frac{k^k e^{-\psi^*_{\nu+1}(k)}}{(e(1+\|x\|))^k}.$$

Отсюда следует, что

$$(1+\|x\|)^k |(D^\alpha f)(x)| \le M_\nu q_{m,\nu}(f) k! e^{-\psi^*_{\nu+1}(k)}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Это означает, что

$$\|f\|_{m,\psi^*_{\nu+1}} \le M_\nu q_{m,\nu}(f). \qquad (28)$$

Так как $m \in \mathbb{Z}_+$ любое, то $f \in G(\psi^*_{\nu+1})$. Следовательно, $f \in G(\Psi^*)$. Из (28) следует, что отображение I^{-1} непрерывно. Таким образом, пространства $G(\Psi^*)$ и $GS(\Phi^*)$ совпадают. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич Б.Л. *Новые пространства основных и обобщённых функций и проблема Коши для конечно-разностных систем* // ДАН СССР. 1954. Т. 99, № 6. С. 893–896.
2. Гельфанд И.М. и Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций. Обобщенные функции, выпуск 2.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1958. 307 с.
3. Гельфанд И.М. и Шилов Г.Е. *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, выпуск 3.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1958. 274 с.
4. J. Chung, S.-Y. Chung, and D. Kim *Characterizations of the Gelfand-Shilov spaces via Fourier transforms* // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124, № 7. P. 2101–2108.
5. J. Chung, S.-Y. Chung, and D. Kim. *Equivalence of the Gelfand-Shilov spaces* // Journal of Math. Anal. and Appl. 1996. V. 203. P. 828–839.
6. Мусин М.И. *О пространстве целых функций, быстро убывающих на вещественной прямой* // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 67–77.
7. Красносельский М.А. и Рутицкий Я.Б.*Выпуклые функции и пространства Орлича.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1958. 271 с.
8. Мусин И.Х., Попёнов С.В. *О весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$* // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, №3. С. 54–62.
9. Напалков В.В., Попёнов С.В. *О преобразовании Лапласа на весовом пространстве Бергмана целых функций в $\mathbb{C}^n$* // Доклады РАН. 1997. Т. 352, №5. С. 595–597.
10. A.Wayne Roberts, Dale E. Varberg *Convex functions.* Academic Press, New York and London. 1973. 300 p.

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin@matem.anrb.ru

Марат Ильдарович Мусин
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: marat402@gmail.com